للتحليل التوفيقي دور محوري في نظرية الاحتمالات ويتمثل ذلك في عدد طرق تجميع عناصر مجموعة تبعا لوجود التكرار أو عدمه، مع الأخذ بعين الاعتبار ترتيب العناصر من عدمه وتتمثل هذه الطرق في التبديلات، الترتيبات والتوفيقات التي تسمح بمعرفة التجميعات الممكنة دون الحاجة إلى كتابتها جميعا.

لتكن لدينا مجموعة مكونة من n عنصرا.

1- التبديلات (Permutations)

تعريف 1-1. *نسمي تبديلة ل n عنصرا، عدد الطرق التي يُوضع بها n عنصرا بتراتيب مختلفة.* [1]

وهنا نميز حالتين

1-1- التبديلات بدون تكرار (Permutations of n different things)

تعريف 1-2. *عدد الطرق التي يُرتب بها n عنصرا غير مكرر تسمى تبديلة بدون تكرار ونكتب " $n!$ " ونقرأ " n عاملي"*، بحيث

$$n!=n(n-1)(n-2)...2.1 \quad \text{مع} \quad 0!=1 .$$ [2]

1-2- التبديلات بتكرار (Permutations of n things all different)

تعريف 1-3. *نسمي تبديلة بتكرار، عدد الطرق التي يُرتب بها n عنصرا يحوي k عنصرا غير مكرر ونكتب*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

بحيث، $n_i,\ i=\overline{1,k}$ *عدد مرات تكرار العنصر i من n ، مع $n_1+n_2+...+n_k=n$.* [3]

خواص 1-1. *لدينا*

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)...3.2.1 \\ &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &= n(n-1)(n-2)...(n-p+1)(n-p)!; \qquad p<n \end{aligned}$$ [4]

لتكن لدينا مجموعة من n عنصرا ونختار منها p عنصرا، بحيث $n<p$ ، في هذه الحالة ينتج لنا إما ترتيبة أو توفيقة.

2- الترتيبات (Permutations of n different things taken p things)

تعريف 1-4. *نسمي ترتيبة، عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصرا من n عنصرا.* [5]

وهنا نميز حالتين

---

(1) جاكلين فوراستييه. *الرياضيات التطبيقية على الاقتصاد*، ترجمة د. محمد الحجار. الكتاب للنشر والتوزيع، مصر، 1989، ص.73.

(2) S. M. Shahidul Islam. *Business mathematics*. Abir Publications, Dhaka, 2004., pp. 38-39.

(3) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص ص. 81-82.

(4) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 39.

(5) Ibid, p. 40.

2-1- الترتيبات بتكرار (Permutations of things which may be repeated)

تعريف 1-5. عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصرا مكررا من n عنصرا، تسمى *ترتيبة بتكرار* ونكتب n^p.[1]

2-2- الترتيبات بدون تكرار (Permutations of n different things taken p at a time)

تعريف 1-6. نسمي *ترتيبة بدون تكرار*، عدد الطرق التي يُرتب بها p عنصر غير مكرر من n عنصرا ونكتب " A_n^p " ونقرأ " A ، n، p" وتعني عدد الترتيبات ل n عنصرا في مجموعات جزئية بها p عنصرا، بحيث

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (2)$$

خواص 1-2

1) لدينا

$$\begin{aligned} A_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \end{aligned}$$

2) بوضع $n=p$ في العلاقة السابقة، نجد

$$\begin{aligned} A_n^n &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots2.1 \\ &= n! \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} A_n^n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \quad (3) \\ &= n! \end{aligned}$$

3) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$

4) $A_n^n = A_n^{n-1}$ (4)

3- التوفيقات (Combinations)

تعريف 1-7. عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب التي يمكن تشكيلها من n عنصرا، تسمى *توفيقة*.(5)

ونميز حالتين

---

(1) The Institute of Cost Accountants of India. *Paper 4: Fundamentals of business mathematics and statistics (FMS). 2nd E.* Repro India Limited, India, 2014., p. 2.40.

(2) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 74.

(3) S. M. Shahidul Islam. Idem, pp. 39-40.

(4) Ibid, pp. 48-50.

(5) The Institute of Cost Accountants of India. Idem, p. 2.45.

3-1- التوفيقات بدون تكرار (Combinations of things all different)

تعريف 1-8. نسمي *توفيقة بدون تكرار*، عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب وغير مكرر، التي يمكن تشكيلها من n عنصرا ونكتب " C_n^p " أو " $\binom{n}{p}$ " ونقرأ على التوالي " C ، n ،p " أو " n ،p"، بحيث

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (1)$$

خواص 1-3

(1

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)(n-p)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!} \end{aligned} \quad (2)$$

(2

$$\begin{aligned} C_n^p &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{1}{p!}\frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{1}{p!}A_n^p \\ &= \frac{A_n^p}{p!} \end{aligned}$$

وعليه $A_n^p = C_n^p . p!$

(3 $C_n^1 = n, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^0 = 1$ (3)

(4 $C_n^p = C_n^{n-p}, \quad 0 \le p \le n$

(5 $C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}, \quad 0 \le p \le n$ (4)

(6 $C_n^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p-2} = C_{n+1}^p, \quad 0 \le p \le n$ (5)

(7 $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}, \quad 0 \le p \le n$ (6)

3-2- التوفيقات بتكرار (Combinations of things not all different)

تعريف 1-9. نسمي *توفيقة بتكرار*، عدد المجموعات الجزئية من p عنصرا غير مرتب ومكرر، التي يمكن تشكيلها من n عنصرا ونكتب

---

(1) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 44.

(2) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 77.

(3) The Institute of Cost Accountants of India. Idem, p. 2.45.

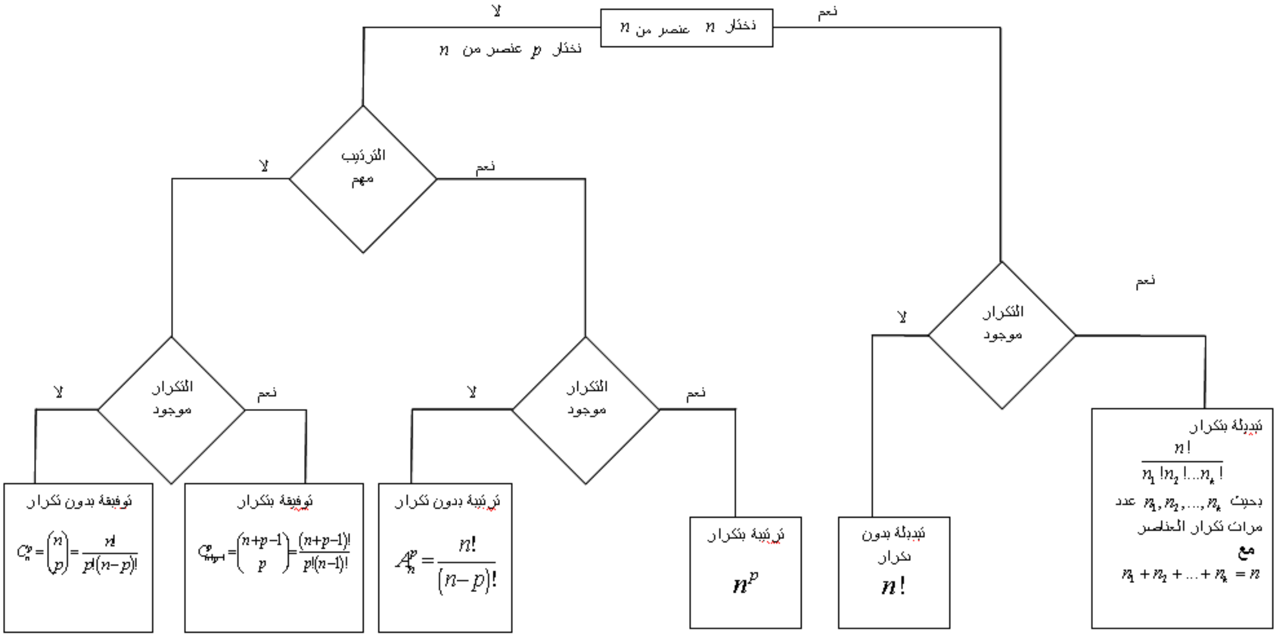
(4) جاكلين فوراستييه. المرجع السابق، ص. 78.

(5) S. M. Shahidul Islam. Idem, p. 51.

(6) Knut Sydsæter, Peter Hammond, Arne StrØm. *Essential mathematics for economics analysis. 4th E.* Pearson Education Limited, London, 2012, p. 58.

$$C_{n+p-1}^{p}=\binom{n+p-1}{p}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

يمكن جمع حالات التحليل التوفيقي السابقة في المخطط التالي



شكل 1-1- مخطط يوضح التحليل التوفيقي

4- تمارين

تمرين 1-1. كم كلمة مرور من 28 حرفا يمكن تشكيلها من حروف الأبجدية العربية ؟

الحل. عدد حروف الأبجدية العربية هو 28 حرفا ومنه $n=28$ ولا يوجد تكرار في الحروف وعليه، عدد كلمات المرور هو $n!=28!$.

تمرين 1-2. بكم طريقة يمكن وضع جنبا إلى جنب سبعة كتب مختلفة على رف مكتبة ؟

الحل. لدينا سبعة كتب مختلفة، أي $n=7$ دون تكرار الكتب (الكتب مختلفة) ومنه، عدد الطرق لصف هذه الكتب هي

$$n!=7!=7.6.5.4.3.2.1=5040 \quad \text{طريقة}$$

تمرين 1-3. كم عددا من عشرة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام من 0 إلى 9 ؟

الحل. لدينا عشرة أرقام من 0 إلى 9، أي $n=10$ دون تكرار لأي رقم وعليه عدد الأعداد من عشرة أرقام هو

$$n!=10!=10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=3628800 \quad \text{عددا}$$

تمرين 1-4. كم كلمة -بمعنى أو بدون معنى- يمكن تشكيلها من حروف كلمة "رياضيات" ؟

الحل. كلمة "رياضيات" تتألف من سبعة حروف مكررة هي { ر، ي، أ، ض، ي، أ، ت}، أي $n=7$، بحيث الحرف "ر" مكتوب مرة واحدة، أي $n_1=1$، الحرف "ي" مكرر مرتين، أي $n_2=2$ والحرف "أ" مكرر مرتين، أي

$n_3=2$، أما الحرفان "ت" و "ض" فمكتوبان مرة واحدة، أي $n_4=1$ و $n_5=1$ على التوالي، مع

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=1+2+2+1+1=7=n$

وعليه، عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من حروف كلمة " رياضيات" هي

$$\frac{7!}{1!2!2!1!1!}=1260 \text{ كلمة}$$

تمرين 1−5. صندوق به ثلاث كريات صفراء وأربع كريات خضراء وخمس كريات حمراء، لا نميز بينها باللمس.

- نسحب عشوائيا كريتين على التوالي وبإرجاع. أوجد عدد الحالات الممكنة.
- ما هو عدد الحالات الممكنة فيما يلي
- الكرية الأولى خضراء ؟
- الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون ؟
- الكريتان المسحوبتان لهما اللون نفسه ؟

الحل

- الصندوق به 12 كرية، أي $n=12$، نسحب كريتين، أي $p=2$. السحب على التوالي وبإرجاع، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p وعليه، عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين هو

$$n^p=12^2=144 \text{ حالة}$$

- سحب الكرية الأولى خضراء، معناه 4^1 حالة ممكنة ونعيد الكرية المسحوبة إلى الصندوق ونسحب كرية واحدة مرة أخرى من 12 كرية، أي 12^1 ومنه، عدد الحالات الممكنة لسحب الكرية الأولى خضراء هو

$$4^1.12^1=48 \text{ حالة}$$

- الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون، معناه أن تكون الكرية الأولى صفراء والثانية خضراء أو العكس، أي $2\left(3^1.4^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى صفراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(3^1.5^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى خضراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(4^1.5^1\right)$ حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين مختلفتين في اللون هو

$$2\left(3^1.4^1\right)+2\left(3^1.5^1\right)+2\left(4^1.5^1\right)=2\left(3.4+3.5+4.5\right)=94 \text{ حالة}$$

- الكريتان المسحوبتان لهما اللون نفسه، معناه إما أن تكون الكريتان صفراوين، أي 3^2 حالة، أو خضراوين، أي 4^2 حالة، أو حمراوين، أي 5^2 حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين لهما اللون نفسه هو

$$3^2+4^2+5^2=50 \text{ حالة}$$

تمرين 1−6. استخدم معطيات وأسئلة التمرين 1−5، لكن في حالة سحب كريتين على التوالي وبدون إرجاع.

الحل

- الصندوق به 12 كرية، أي $n=12$، نسحب كريتين، أي $p=2$. السحب على التوالي وبدون إرجاع، أي لدينا حالة ترتيبية بدون تكرار A_n^p وعليه، عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين هو

$$A_n^p = A_{12}^2 = \frac{12!}{(12-2)!}$$
$$= \frac{12!}{10!} = \frac{12.11.10!}{10!}$$
$$= 12.11 = 132$$

- سحب الكرية الأولى خضراء دون إرجاع، معناه A_4^1 حالة ممكنة فيتبقى في الصندوق 11 كرية، نسحب منها الكرية الثانية المتبقية، أي A_{11}^1 ومنه، عدد الحالات الممكنة لسحب الكرية الأولى خضراء هو

$$A_4^1.A_{11}^1 = \frac{4!}{(4-1)!}.\frac{11!}{(11-1)!}$$
$$= \frac{4!}{3!}.\frac{11!}{10!}$$
$$= \frac{4.3!}{3!}.\frac{11.10!}{10!}$$
$$= 4.11 = 44$$

- الكريتان المسحوبتان مختلفتان في اللون، معناه أن تكون الكرية الأولى صفراء والثانية خضراء أو العكس، أي $2\left(A_3^1.A_4^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى صفراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(A_3^1.A_5^1\right)$ حالة، أو الكرية الأولى خضراء والثانية حمراء أو العكس، أي $2\left(A_4^1.A_5^1\right)$ حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين مختلفتين في اللون هو

$$2\left(A_3^1.A_4^1\right)+2\left(A_3^1.A_5^1\right)+2\left(A_4^1.A_5^1\right) = 2\left(A_3^1.A_4^1 + A_3^1.A_5^1 + A_4^1.A_5^1\right)$$
$$= 2\left[\frac{3!}{(3-1)!}.\frac{4!}{(4-1)!} + \frac{3!}{(3-1)!}.\frac{5!}{(5-1)!} + \frac{4!}{(4-1)!}.\frac{5!}{(5-1)!}\right]$$
$$= 2\left[\frac{3!}{2!}.\frac{4!}{3!} + \frac{3!}{2!}.\frac{5!}{4!} + \frac{4!}{3!}.\frac{5!}{4!}\right]$$
$$= 2\left[\frac{4.3.2!}{2!} + \frac{3.2!}{2!}.\frac{5.4!}{4!} + \frac{5.4.3!}{3!}\right]$$
$$= 2\left(4.3+3.5+54\right) = 94$$

- الكريتان المسحوبتان لهما اللون نفسه، معناه إما أن تكون الكريتان صفراوين، أي A_3^2 حالة، أو خضراوين، أي A_4^2 حالة، أو حمراوين، أي A_5^2 حالة وعليه، مجموع الحالات الممكنة لسحب كريتين لهما اللون نفسه هو

$$A_3^2 + A_4^2 + A_5^2 = \frac{3!}{(3-2)!} + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{5!}{(5-2)!}$$
$$= \frac{3!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \frac{5!}{3!}$$
$$= 3! + \frac{4.3.2!}{2!} + \frac{5.4.3!}{3!}$$
$$= 3.2.1 + 4.3 + 5.4 = 38$$

تمرين 1-7. كم عددا من رقمين يمكن تشكيله من الأرقام التالية 2، 1، 5، 7 ؟

الحل. عدد الأرقام هو أربعة، أي $n = 4$، نختار منها اثنين لتشكيل عدد من رقمين، أي $p = 2$. في تشكيل الأعداد الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p وعليه، عدد الأعداد من رقمين هو

$4^2=16$ عددا

تمرين 1−8. في سباق للخيول، يتنافس عشرون مشتركا. ما هو عدد التشكيلات الممكنة للفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى ؟

الحل. لدينا 20 مشتركا، أي $n=20$، عدد الفائزين هو 3، أي $p=3$. في السباق، الترتيب مهم والتكرار غير موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بدون تكرار A_n^p وعليه، عدد التشكيلات الممكنة للفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى هو

$$A_n^p=A_{20}^3=\frac{20!}{(20-3)!}$$
$$=\frac{20!}{17!}=\frac{20.19.18.17!}{17!}$$
$$=20.19.18=6840$$

تمرين 1−9

1) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة " تذبذب" ؟

2) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة السابقة شرط أن يُكتب حرفا "ذ" متتابعين ؟

الحل

1) كلمة "تذبذب" تتألف من خمسة حروف مكررة هي { ت، ذ، ب، ذ، ب}، أي $n=5$، بحيث الحرف "ت" مكتوب مرة واحدة، أي $n_1=1$، الحرف "ذ" مكرر مرتين، أي $n_2=2$ والحرف "ب" مكرر مرتين، أي $n_3=2$، مع $n_1+n_2+n_3=1+2+2=5=n$ وعليه، يمكن ترتيب حروف كلمة " تذبذب" ب

$$\frac{5!}{1!2!2!}=\frac{5.4.3.2!}{1.2.1.2!}=5.2.3=30 \quad \text{طريقة}$$

2) عند كتابة حرفي "ذ" متتابعين، فإن كلمة " تذبذب" يتبقى منها ثلاثة حروف مكررة هي { ت، ب، ب}، أي $n=3$، بحيث الحرف "ت" مكتوب مرة واحدة، أي $n_1=1$، الحرف والحرف "ب" مكرر مرتين، أي $n_2=2$، مع $n_1+n_2=1+2=3=n$ وعليه، يمكن ترتيب حروف كلمة " تذبذب" شرط أن يُكتب حرفا "ذ" متتابعين ب

$$\frac{3!}{1!2!}=\frac{3.2!}{1.2!}=3 \quad \text{طُرق}$$

تمرين 1−10. كم كلمة من أربعة حروف تبدأ بحرف "م" يمكن تشكيلها من الحروف التالية "س، ل، م، أ، ه، و" ؟

الحل. لدينا ستة حروف، أي $n=6$، نختار منها ثلاثة حروف (لأننا نريد تشكيل كلمة من أربعة حروف تبدأ بحرف "م")، أي $p=3$. في تشكيل الكلمات، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p وعليه، عدد الكلمات من أربعة حروف تبدأ بحرف "م" يمكن تشكيلها من الحروف السابقة هو

$6^3=216$ كلمة

تمرين 1−11. كم عددا طبيعيا محصورا بين 2000 و4000 (أي $2000<x<4000$) يمكن تشكيله من الأرقام التالية 0، 3، 5، 2، 4 ؟

الحل. لدينا خمسة أرقام، أي $n=5$، نختار منها أربعة أرقام لأن $2000<x<4000$ وعليه رقم الآلاف هو أحد الرقمين 2 أو 3، إذا تبقى أن نختار ثلاثة أرقام من خمسة، أي $p=3$ ونستثني العدد 2000 لأن $2000<x$، في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p ومنه، عدد الأعداد الطبيعية

المحصورة بين 2000 و 4000 التي يمكن تشكيلها من الأرقام السابقة هو

$$2.5^3-1=249 \quad \text{عددا}$$

تمرين 1−12. كم عددا طبيعيا من أربعة أرقام وأكبر من 6000 يمكن تشكيله من الأرقام التالية 6، 3، 8، 5، 1 ؟

الحل. لدينا خمسة أرقام، أي $n=5$، نختار منها أربعة أرقام وحسب الأرقام المتاحة فإن رقم الآلاف هو أحد الرقمين 6 أو 8، إذا تبقى أن نختار ثلاثة أرقام من خمسة، أي $p=3$، في تشكيل الأعداد، الترتيب مهم والتكرار موجود، أي لدينا حالة ترتيبية بتكرار n^p ومنه، عدد الأعداد الطبيعية من أربعة أرقام والأكبر من 6000 التي يمكن تشكيلها من الأرقام السابقة هو

$$2.5^3=250 \quad \text{عددا}$$

تمرين 1−13. فوج به 30 طالبا منهم 10 طالبات، نريد تشكيل فوج جزئي من 8 طلاب. ما هو عدد الحالات الممكنة ؟

ما عدد الأفواج الجزئية الممكنة في كل حالة مما يلي

- أن يضم الفوج الجزئي طالبتين ؟
- ألا يضم الفوج الجزئي أي طالب ذكر ؟
- أن يضم الفوج الجزئي ست طالبات على الأقل ؟
- أن يضم الفوج الجزئي طالبتين على الأكثر ؟

الحل

- الفوج به 30 طالبا، أي $n=30$ ونختار منه 8 طلاب، أي $p=8$. بما أنه لا يوجد تكرار أو ترتيب فإنها حالة توفيقة بدون تكرار، أي $C_n^p=\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ ومنه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\begin{aligned} C_{30}^8 &= \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{30!}{8!(30-8)!} \\ &= \frac{30!}{8!22!} \\ &= \frac{30.29.28.27.26.25.24.23.22!}{8.7.6.5.4.3.2.1.22!} \\ &= 29.27.13.25.23 = 5852925 \end{aligned}$$

أي، يمكن تشكيل 5852925 فوجا جزئيا من 8 طلاب من مجموع 30 طالبا.

- أن يضم الفوج الجزئي طالبتين، معناه $C_{10}^2=\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ وست طلبة المتبقيين نختارهم من 20 طالبا، أي $C_{20}^6=\begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$ وعليه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\binom{10}{2}.\binom{20}{6}=\frac{10!}{2!(10-2)!}.\frac{20!}{6!(20-6)!}$$
$$=\frac{10!}{2!8!}.\frac{20!}{6!14!}$$
$$=\frac{10.9.8!}{2.1.8!}.\frac{20.19.18.17.16.15.14!}{6.5.4.3.2.1.14!}$$
$$=5.9.19.17.8.15=1744200$$

أي، يمكن تشكيل 1744200 فوجا جزئيا يضم طالبتين.

– ألا يضم الفوج الجزئي أي طالب ذكر، معناه أنها تضم فقط الطالبات، أي

$$\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!(10-8)!}$$
$$=\frac{10!}{8!2!}$$
$$=\frac{10.9.8!}{2.1.8!}$$
$$=5.9=45$$

وعليه يمكن تشكيل 45 فوجا جزئيا لا يضم أي طالب ذكر.

– أن يضم الفوج الجزئي ست طالبات على الأقل، معناه ست طالبات، أي $\binom{10}{6}$ وطالبين، أي $\binom{20}{2}$ أو سبع طالبات، أي $\binom{10}{7}$ وطالب واحد، أي $\binom{20}{1}$ أو ثماني طالبات، أي $\binom{10}{8}$ وعليه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\binom{10}{6}.\binom{20}{2}+\binom{10}{7}.\binom{20}{1}+\binom{10}{8}$$
$$=\frac{10!}{6!4!}.\frac{20!}{2!18!}+\frac{10!}{7!3!}.\frac{20!}{1!19!}+45$$
$$=\frac{10.9.8.7.6!}{4.3.2.1.6!}.\frac{20.19.18!}{2.1.18!}+\frac{10.9.8.7!}{3.2.1.7!}.\frac{20.19!}{1.19!}+45$$
$$=10.3.7.10.19+10.3.4.20+45=42345$$

وعليه يمكن تشكيل 42345 فوجا جزئيا يضم ست طالبات على الأقل.

– أن يضم الفوج الجزئي طالبتين على الأكثر، معناه طالبتين، أي $\binom{10}{2}$ وست طلبة، أي $\binom{20}{6}$ أو طالبة واحدة، أي $\binom{10}{1}$ وسبع طلبة، أي $\binom{20}{7}$ أو لا يوجد أي طالبة، أي $\binom{10}{0}$ ويوجد ثماني طلبة، أي $\binom{20}{8}$ ومنه عدد الأفواج الجزئية الممكنة هو

$$\binom{10}{2}.\binom{20}{6}+\binom{10}{1}.\binom{20}{7}+\binom{20}{8}=1744200+\frac{10!}{1!9!}.\frac{20!}{7!13!}+\frac{20!}{8!12!}$$

$$=1744200+\frac{10.9!}{1.9!}.\frac{20.19.18.17.16.15.14.13!}{7.6.5.4.3.2.1.13!}$$

$$+\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12!}{8.7.6.5.4.3.2.1.12!}$$

$$=1744200+10.19.17.16.15+19.17.15.7.13$$

$$=2960295$$

وعليه يمكن تشكيل 2960295 فوجا جزئيا يضم طالبتين على الأكثر.