Université Aboubakr Belkaid
Faculté de Technologie,
Département de génie électrique et électronique
Licence 3

Asservissements continus et régulation

Chargée de module:

Mme BENMANSOUR. S

Université Aboubakr Belkaid
Faculté de Technologie,
Département de génie électrique et électronique
Licence 3

Asservissements continus et régulation

Cours 3: ***Réponses temporelles des systèmes continus LTI***

Chargée de module:
Mme BENMANSOUR. S

Contenu du cours III

1. Introduction

2. Etude des systèmes du 1^{er} ordre

2. Etude des systèmes du 2ème ordre

Contenu du cours III

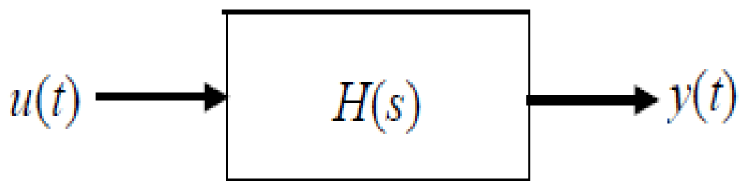
1. **Introduction**

2. *Etude des systèmes du 1er ordre*

2. *Etude des systèmes du 2ème ordre*

Introduction

1. Système continu LTI



$H(s)$: fonction de transfert

Quelle est la forme de la sortie y(t) du modèle en réponse aux signaux usuels?

- **impulsion de Dirac** $u(t)=\delta(t)$
- **signal échelon** $u(t)=\Gamma(t)$
- **signal rampe** $u(t)=v(t)$

Contenu du cours III

1. *Introduction*

2. ***Etude des systèmes du 1^er^ ordre***

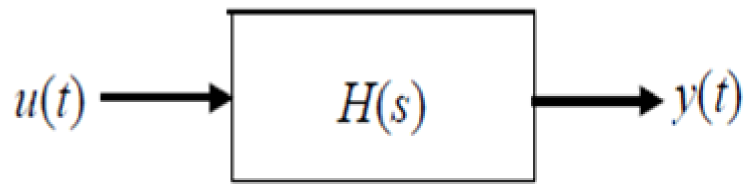
2. *Etude des systèmes du 2ème ordre*

Etude des systèmes du 1er ordre

1. Définition

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$$



2. Fonction de transfert

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \overset{\text{TL}}{\Rightarrow} s\,T\,Y(s) + Y(s) = KU(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{1 + T\,s}}$$

T : constante de temps

K : gain statique

Pôle : $\lambda = -\frac{1}{T}$

Condition de stabilité : $T > 0$

Etude des systèmes du 1er ordre

3 . Réponse temporelle $y(t) = ?$

3.1 Réponse impulsionnelle

Entrée : signal impulsion $u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$$

Réponse du système : $y(t) = ?$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+Tp} \Rightarrow Y(s) = H(s) \times U(s) \qquad Avec : U(s) = 1$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s)$$

$$\Rightarrow y(t) = h(t) = TL^{-1}\left(\frac{K}{1+Tp}\right)$$

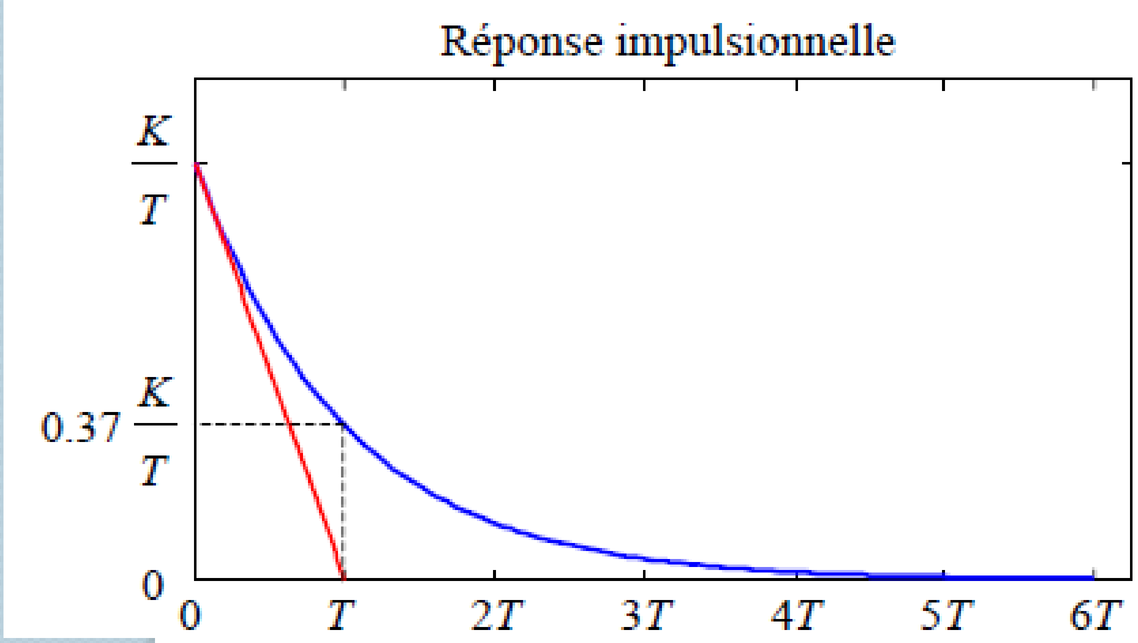
$$\Rightarrow y(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{K}{T} e^{\lambda t}$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3 . Réponse temporelle

3.1 Réponse impulsionnelle

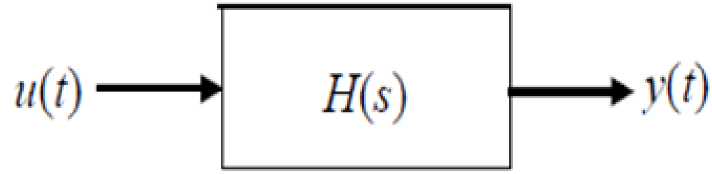
Réponse du système : $\Rightarrow y(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$



0	T	$2T$	$3T$
$h_0 = \frac{K}{T}$	$0.37\ h_0$	$0.13\ h_0$	$0.05\ h_0$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle



3.2 Réponse indicielle

- **Entrée : signal échelon** $u(t) = E_0 \Gamma(t)$

- **Réponse du système:**

$$u(t) = E_0 \Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{E_0}{s}$$ **On en déduit**

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{(1+Ts)} \times \frac{E_0}{s} \qquad \Rightarrow y(t) = TL^{-1}\left(\frac{K\ E_0}{s(1+Ts)}\right)$$

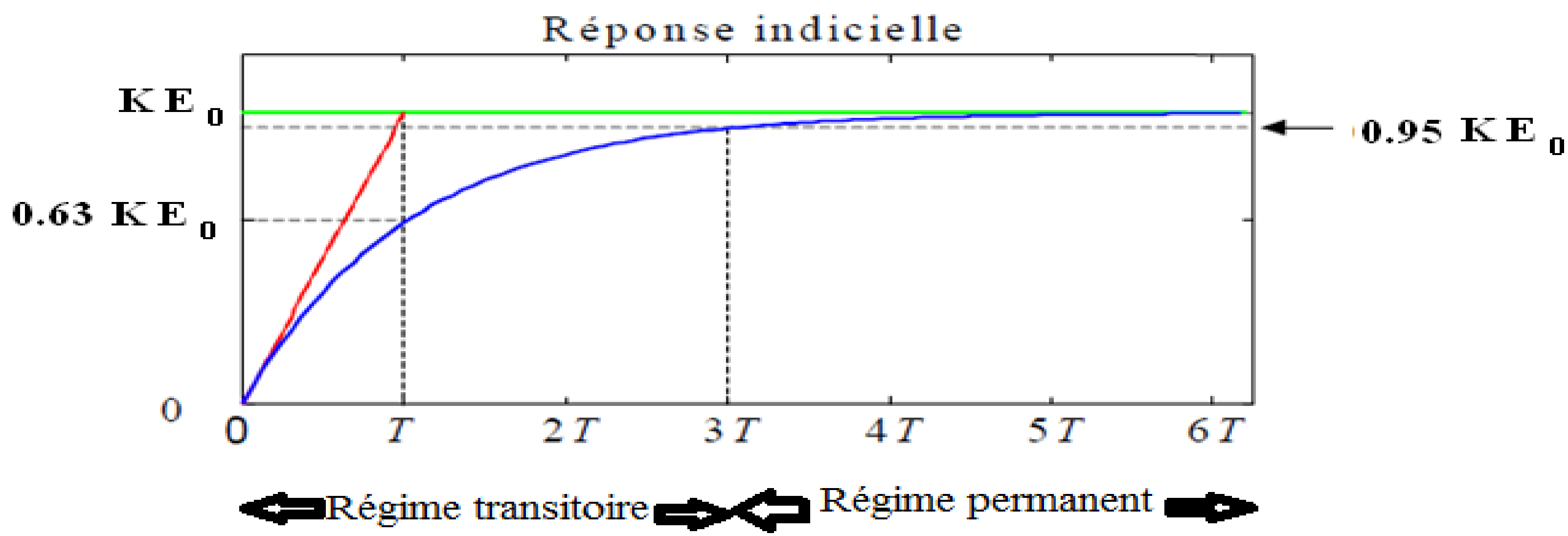
$$\Rightarrow y(t) = K.E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = K.E_0\left(1 - e^{\lambda t}\right)$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

$$\Rightarrow y(t) = K.E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



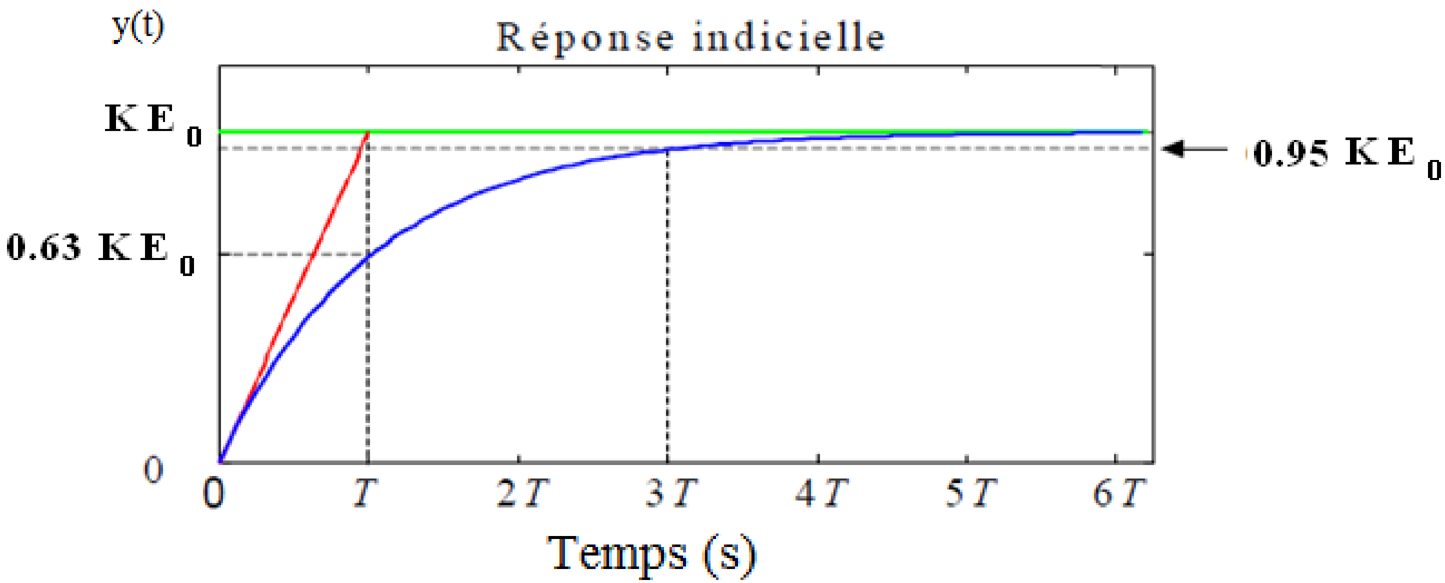
t	T	$2T$	$3T$	$5T$	∞
$\frac{y(t)}{y_\infty}(\%)$	63%	87%	95%	99,4%	100%

y_∞ : valeur de la sortie en régime permanent

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle



▪ **Valeur initiale de la sortie**

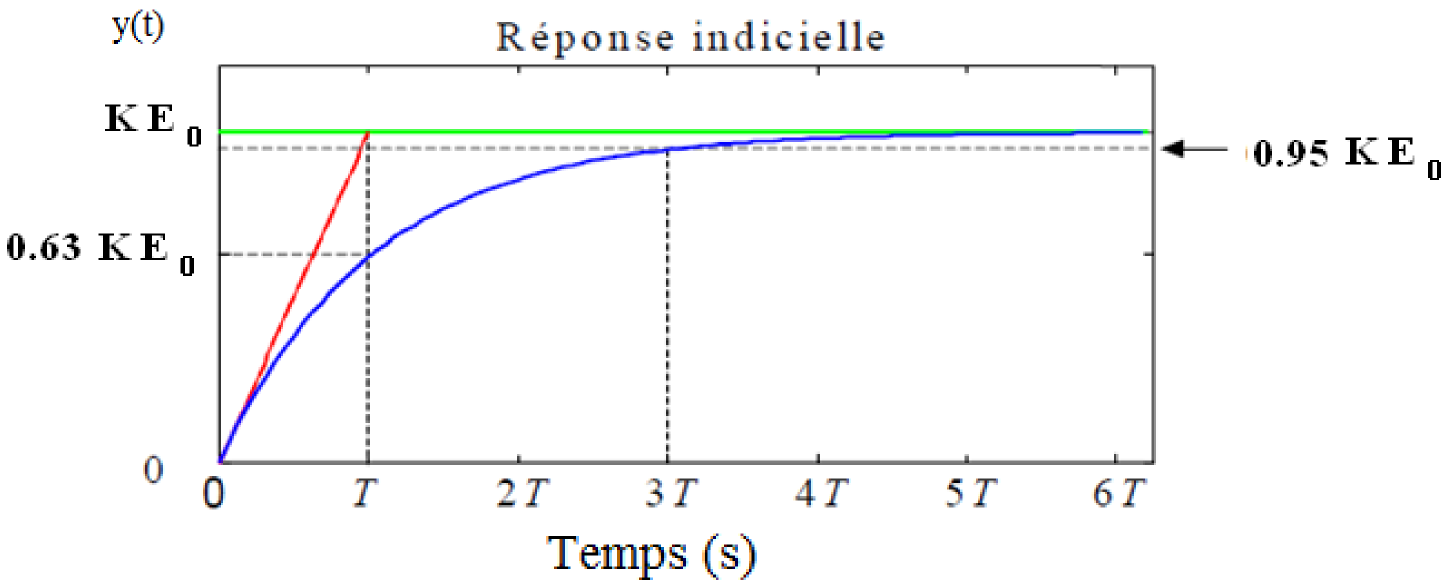
$$y(0) = \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} s.Y(s) = \lim_{s\to\infty}\left(s.\frac{E_0}{s}.\frac{K}{1+Ts} \right) \qquad \Rightarrow y(0) = 0$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle

$$\Rightarrow y(t) = K.E_0\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



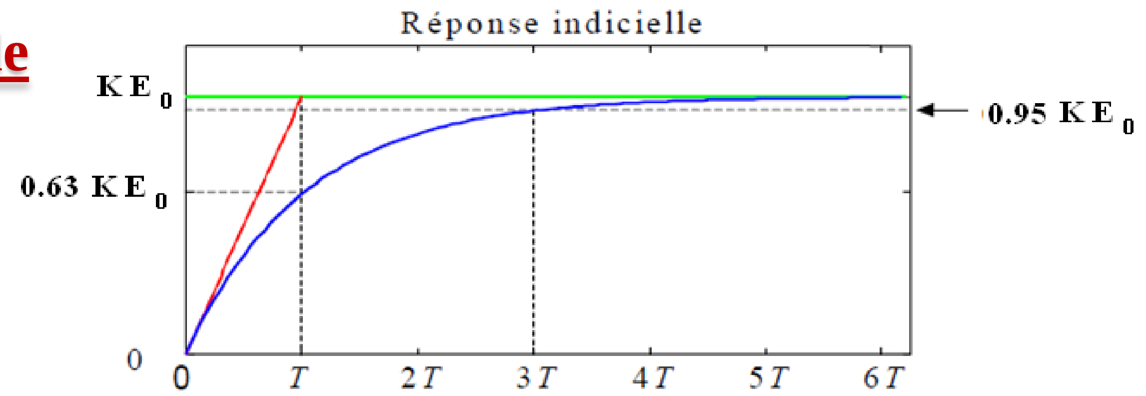
- **Valeur de la sortie en régime permanent (valeur finale)**

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s.Y(s) = \lim_{s\to 0}\left(s.\frac{E_0}{s}.\frac{K}{1+Ts}\right) \quad \Rightarrow y(\infty) = K\ E_0$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.2 Réponse indicielle



- **Temps de réponse t_r du système:**

•t_r = temps au bout duquel la réponse indicielle atteint $0.95y_\infty$

$$\boxed{t_r \approx 3T}$$

- **Temps de montée t_m**

t_m = temps au bout duquel la réponse passe de $0.1y_\infty$ à $0.9y_\infty$

$$\boxed{t_m \approx 2{,}2T}$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.4 Réponse à une rampe

- **Entrée : signal rampe** $u(t)=v(t)=A\,t$

- **Réponse du système**

$$u(t)=v(t)\Rightarrow U(s)=V(s)=\frac{A}{s^2}$$

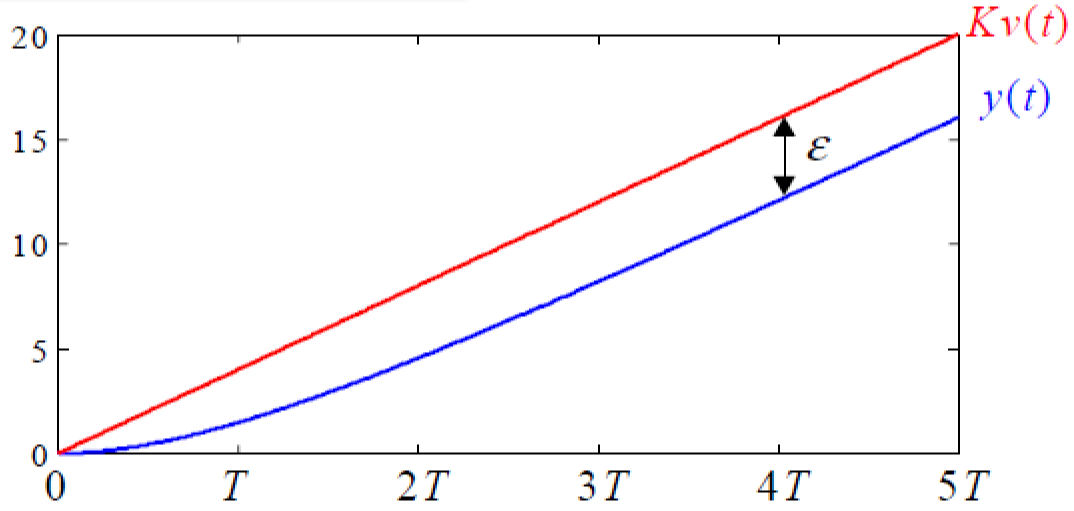
$$Y(s)=H(s)V(s)=\frac{K}{(1+Ts)}\times\frac{A}{s^2}\Rightarrow Y(s)=\frac{K\ A}{s^2(1+Ts)}$$

$$\boxed{y(t)=K(t-T)+KTe^{-\frac{t}{T}}}$$

Etude des systèmes du 1er ordre

3. Réponse temporelle

3.4 Réponse à une rampe



- La sortie suit asymptotiquement la rampe $Kv(t)$ avec un retard T
- L'écart en régime permanent $\varepsilon = Kv(t) - y(t)$ est appelé erreur de traînage

Erreur de traînage : $\varepsilon = KT$

Contenu du cours II

1. *Introduction*

2. *Etude des systèmes du 1er ordre*

2. **Etude des systèmes du 2ème ordre**

3. *Systèmes d'ordre supérieur à 2 et autre système*

Etude des systèmes du 2ème ordre

1. Définition

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre:

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t)$$

2. Fonction de transfert

$$a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0y(t)=b_0u(t) \;\Rightarrow\; \left(a_2s^2+a_1s+a_0\right)Y(s)=b_0U(s)$$

$$\boxed{H(s)=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

2. Fonction de transfert

Autre écriture de la fonction de transfert

$$\boxed{H(s)=\frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1}}$$

Forme canonique

ou

$$\boxed{H(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}}$$

Forme standard

K : gain statique

ξ : facteur d'amortissement sans dimension

ω_n : pulsation propore ou pulsation naturelle non amortie du système (en rad/s) avec $\omega_n > 0$

Equation caractéristique : $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = 0$

Etude des systèmes du 2ème ordre

3. Comportement du système: (Pôles du système)

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Les pôles sont les racines du polynôme

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

- Etude du discriminant réduit $\Delta = \omega_n^2\left(\xi^2 - 1\right)$

<u>*Utilisation du discriminant réduit*</u> Δ' : b pair $\Rightarrow b = 2b'$.

$$\Delta' = b'^2 - ac > 0 . \begin{cases} x' = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \\ x'' = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \end{cases}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

3. Comportement du système: (Pôles du système)

$$\Delta = \omega_n^2\left(\xi^2 - 1\right)$$

$\Delta \geq 0 \Rightarrow \xi \geq 1$

$\Downarrow$

comportement apériodique

$\xi > 1$

$\Downarrow$

système à deux pôles réels distincts

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

et

$$\lambda_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$\xi = 1$

$\Downarrow$

système à un pôle réel double

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

$\Delta < 0 \Rightarrow \xi < 1$

$\Downarrow$

comportement oscillatoire

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

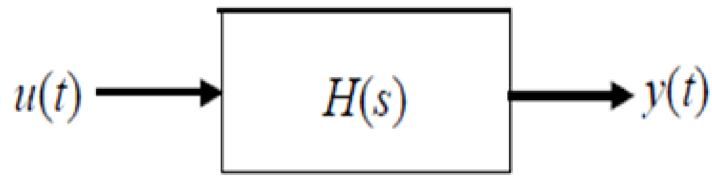
et

$$\lambda_2 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Système à deux poles complexes

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Réponse indicielle



- **Entrée : signal échelon** $u(t) = E_0\Gamma(t)$

- **Réponse du système:**

$$u(t) = E_0\Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{E_0}{s}$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \times \frac{E_0}{s}$$

Réponse indicielle

- ***Réponse indicielle apériodique*** $\xi \geq 1$
- ***Réponse indicielle oscillatoire*** $\xi < 1$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Réponse indicielle

4.1 Réponse indicielle apériodique : $\xi > 1$

- **Pôles du système** $\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1) \succ 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Réponse du système:

$$Y(s) = \frac{KE_0}{s\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1\right)} \Rightarrow Y(s) = \frac{KE_0}{s(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$$

$$y(t) = K_1 E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) - K_2 E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

$$\text{avec} \quad K_1 = \frac{K\,T_1}{T_1 - T_2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{K\,T_2}{T_1 - T_2}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Réponse indicielle:

4.1 Réponse indicielle apériodique : $\xi = 1$

- **Pôles du système**

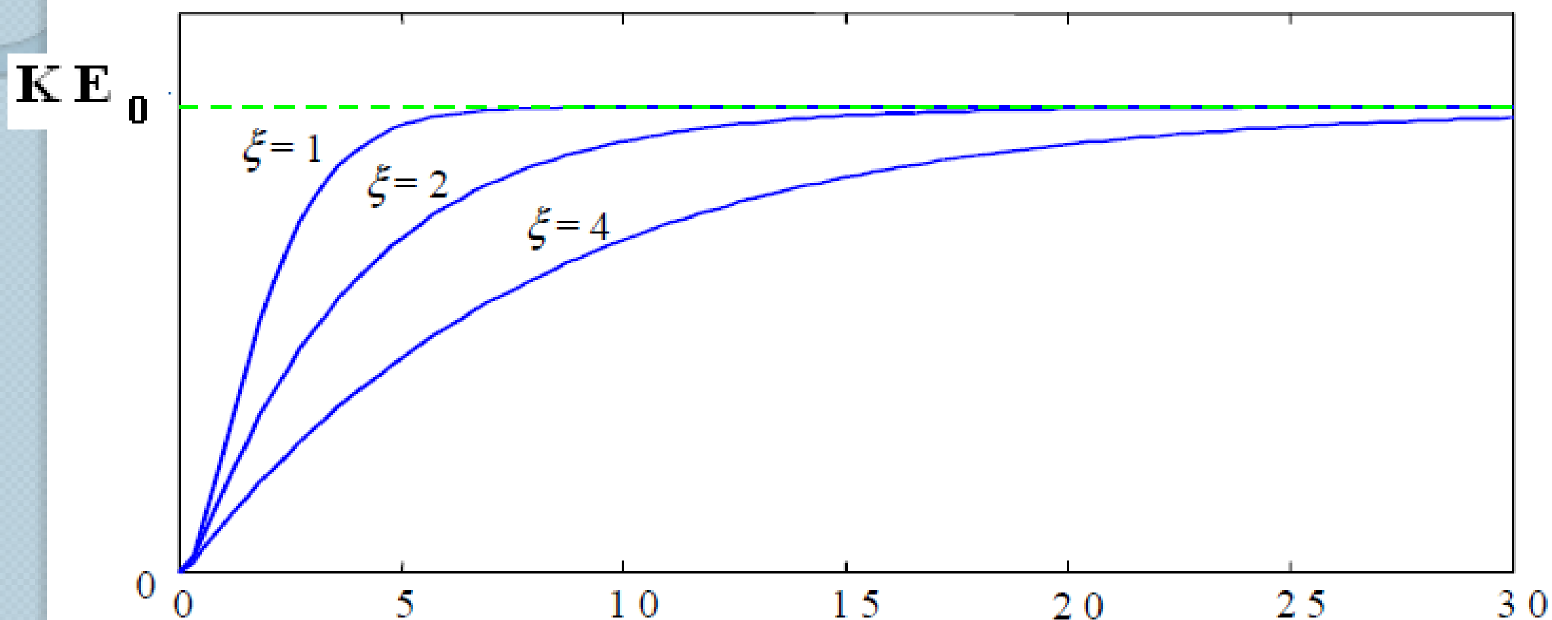
$$\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$$

Réponse du système:

$$Y(s) = \frac{K\ E_0}{s\left(1 + \frac{s}{\omega_n}\right)^2} = \frac{K\ E_0}{s(1 + Ts)^2}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Système apériodique $\xi \geq 1$



▪ **Remarques**

- **Pente à l'origine nulle**
- **La réponse la plus rapide correspond à** $\xi = 1$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Réponse indicielle

4.2 Réponse indicielle oscillatoire $(0 < \xi < 1)$

- **Pôles du système** $\Delta = \omega_n^2(\xi^2 - 1) \prec 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

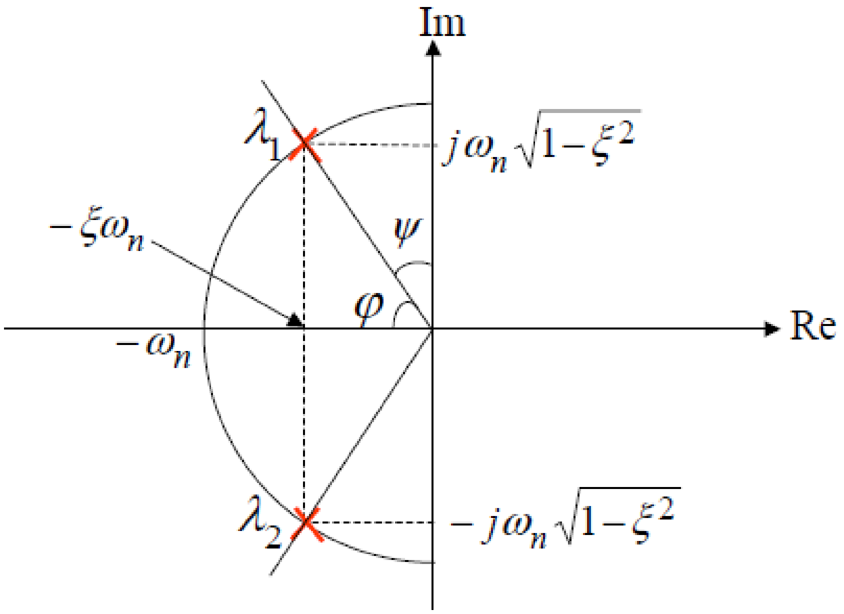
- **Lieu des pôles**

Pour $0 \leq \xi \leq 1$

Rayon de l'arc de cercle = ω_n

$$\cos(\varphi) = \xi$$

$$\sin(\psi) = \xi$$



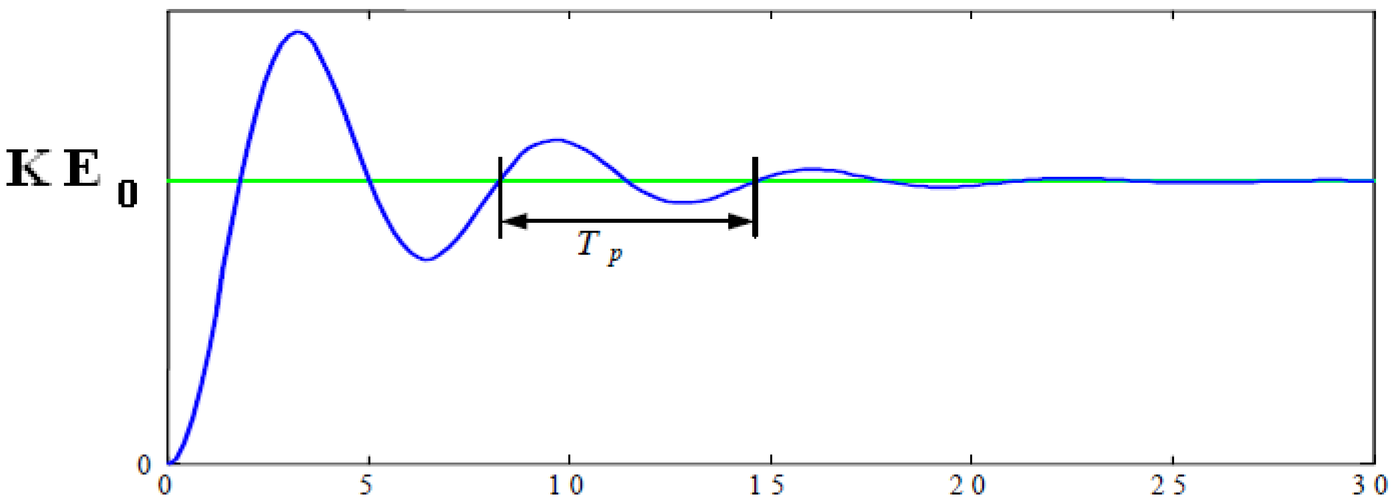
Etude des systèmes du 2ème ordre

4.2 Réponse indicielle oscillatoire $(0<\xi<1)$

- **Réponse indicielle**

$$y(t)=K\left(1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_p t+\varphi)\right)$$

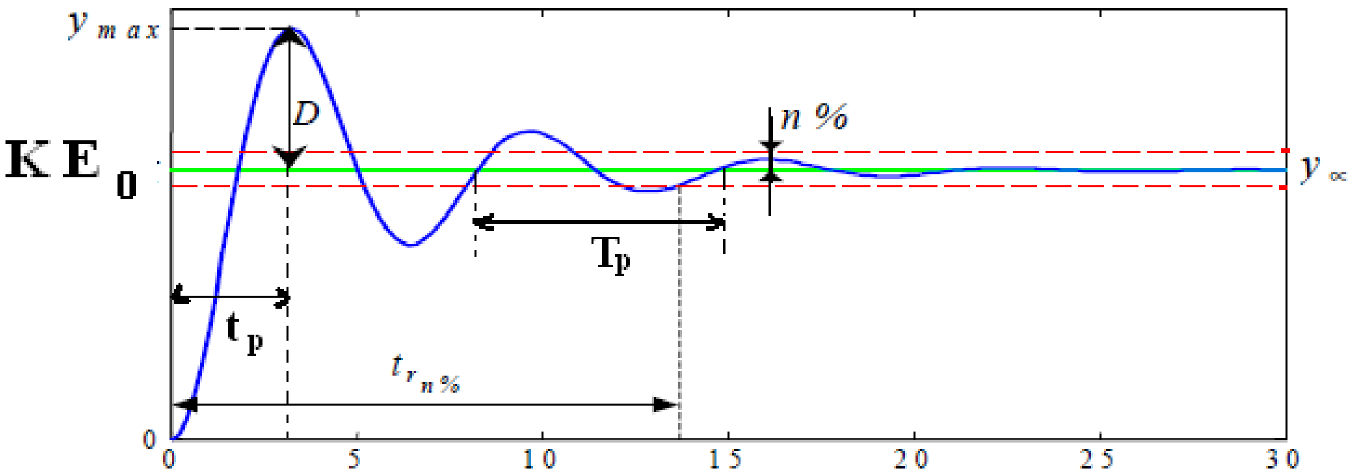
avec $\omega_p=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ et $\varphi=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)=\arccos\xi$



Etude des systèmes du 2ème ordre

4.2 Réponse indicielle oscillatoire $(0<\xi<1)$

- **Caracteristique de la réponse indicielle**



Réponse oscillatoire amortie de pulsation $\omega_p=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

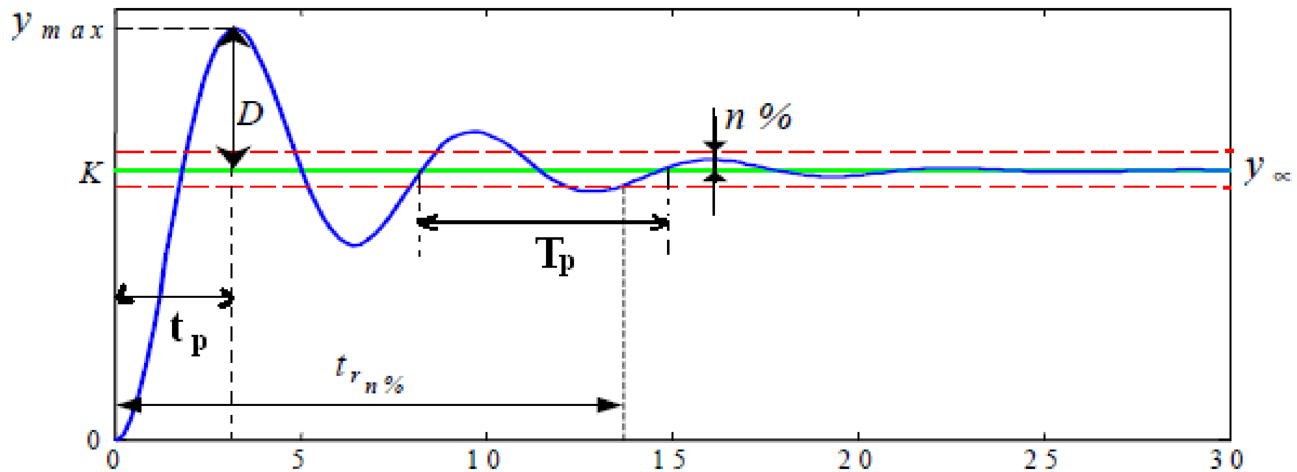
Pseudo-période des oscillations $T_p=\dfrac{2\pi}{\omega_p}$

Temps de pic $t_p=\dfrac{\pi}{\omega_p}$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4.2 Réponse indicielle oscillatoire $(0<\xi<1)$

- **Caracteristique de la réponse indicielle**



Dépacement (D)

Définition:

$$D_{\%}=\frac{y_{\max}-y_{\infty}}{y_{\infty}}\times 100$$

y_{∞} : valeur de la sortie en régime permanent

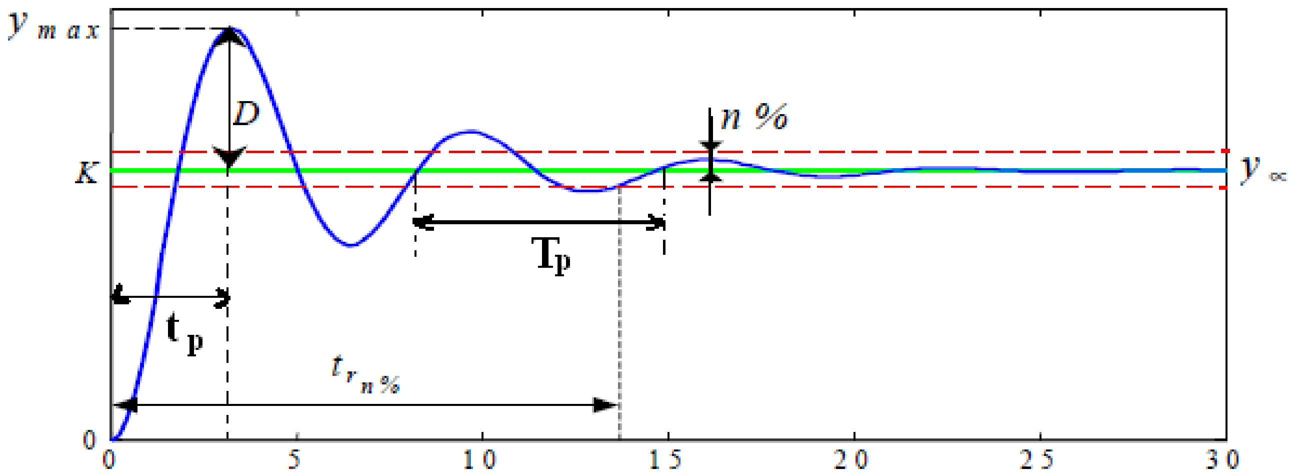
y_{max} : valeur de pic de la réponse indicielle

D est lié au coefficient d'amortissement ξ par : $D_{\%}=100\,e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Système oscillatoire $(0 < \xi < 1)$

- **Caractéristique de la réponse indicielle**



$n\% \; (t_{r_{n\%}})$

Temps de réponse

On mesure en général le temps de réponse à 95% $t_{r_{5\%}} \approx \dfrac{3}{\xi \omega_n}$

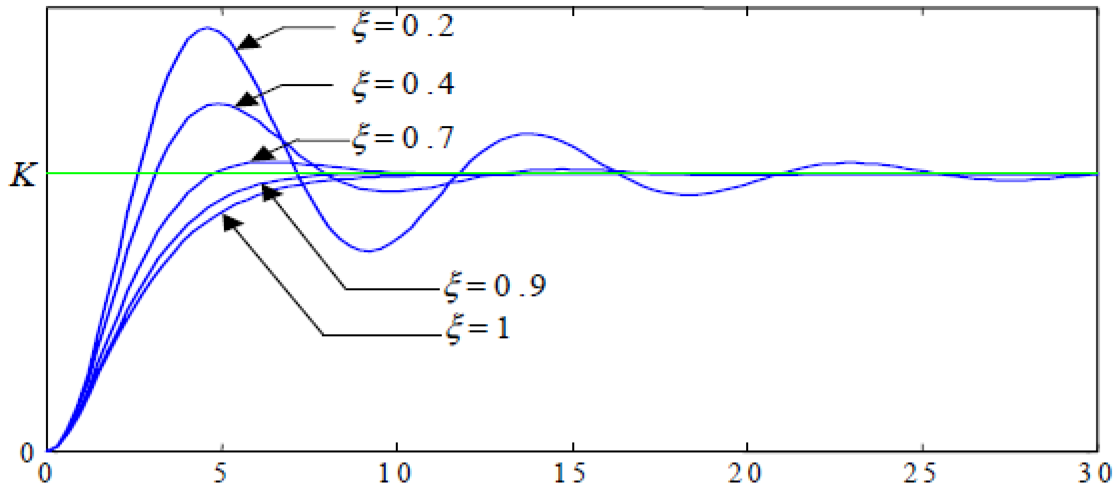
Temps de montée

$$t_m = \frac{1.8}{\omega_n}$$

Etude des systèmes du 2ème ordre

4. Réponse indicielle

▪ **Influence du coefficient d'amortissement**



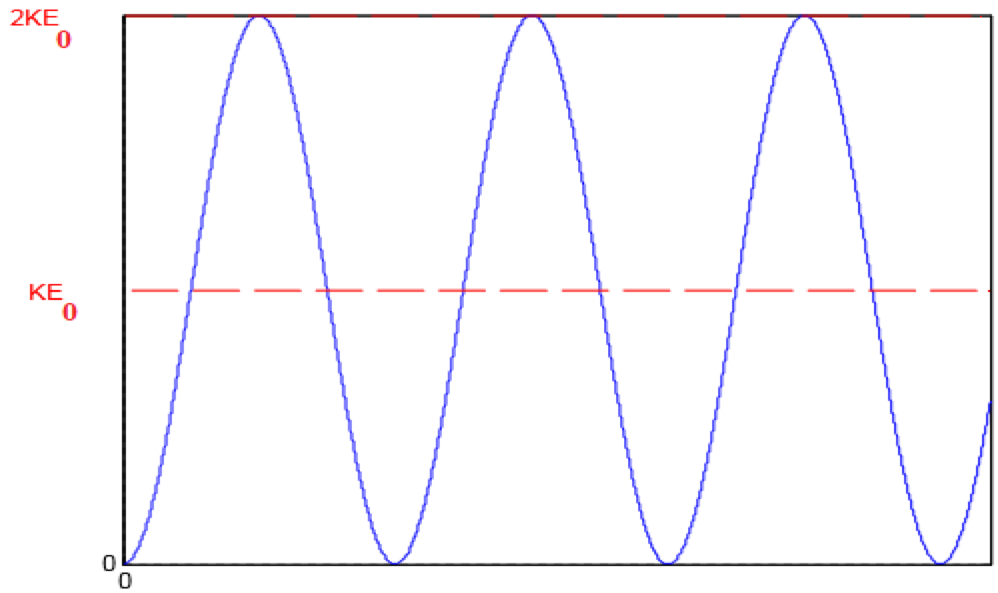
- Amortissement faible ($\xi < 0.7$) : réponse peu amortie, fortes oscillations, fort dépassement, réponse d'autant plus rapide que ξ est faible
- Amortissement fort ($\xi > 0.7$) : réponse très amortie, pas d'oscillations, dépassement à peine visible
- Amortissement $\xi = 0.7$ (souvent utilisé)
  - Dépassement $D \approx 5\%$ à $t_{r_{5\%}} \approx 3$

I.2 Etude du système 2ème ordre

4.3. Système juste oscillant ou critiqu $\xi = 0$

$$\xi = 0 \Rightarrow D(s) = s^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} s_1 = \lambda_1 = j\omega_n \\ s_2 = \lambda_2 = -j\omega_n \end{cases}$$

$$y(t) = kE_0\left[1 - \cos\omega_n t\right]$$



Etude des systèmes du 2ème ordre

5. Exemple d'application

- **Exemple 1**

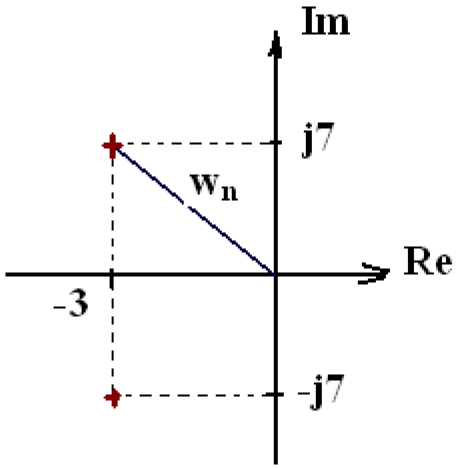
Soit la fonction de transfert suivante:

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

Calculer les caractéristiques dynamiques du système.

- **Exemple 2**

Soit le lieu de pôle suivant:



Trouver l'expression de la FT et les caractéristiques du système.