Université Aboubakr Belkaid
Faculté de Technologie,
Département de génie électrique et électronique
Licence 3

Asservissements continus et régulation

Chargée de module:

Mme BENMANSOUR. S

Université Aboubakr Belkaid
Faculté de Technologie,
Département de génie électrique et électronique
Licence 3

Asservissements continus et régulation

Chapitre IV:
Stabilité et performances des systèmes continus LTI

Chargée de module:
Mme BENMANSOUR. S

Contenu du cours IV

1. *Propriétés d'un système asservi*
2. *Stabilité*
3. *Précision*
4. *Rapidité*

Contenu du cours IV

1. ***Propriétés d'un système asservi***
2. ***Stabilité***
3. ***Précision***
4. ***Rapidité***

Propriétés d'un système asservi

- **Stabilité**

Le système asservi doit fonctionner automatiquement. Il est indispensable qu'il soit stable. Autrement, le système évolue en s'éloignant de son point (ou trajectoire) d'équilibre, ce qui peut engendrer des saturations voire une dégradation du système.

- **Précision**

En régime permanent, la sortie du système asservi doit suivre la référence sans erreur et rejeter rapidement les perturbations

- **Performances dynamiques**

Elles caractérisent le temps de réaction du système lorsque la consigne varie ainsi que la rapidité avec laquelle le système asservi "efface" les perturbations

Contenu du cours IV

1. *Propriétés d'un système asservi*

2. **Stabilité**

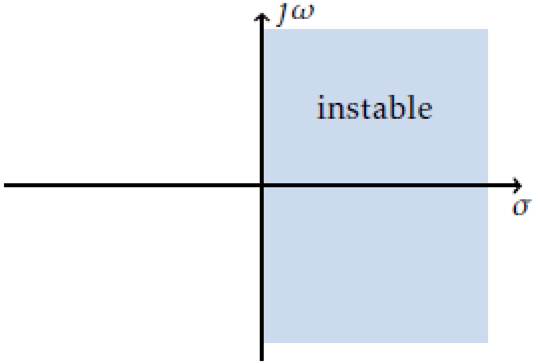
3. *Précision*

4. *Rapidité*

Analyse de la stabilité d'un système asservi

1. Notion de stabilité : définitions

- **Un système est stable si et seulement si écarté de sa position d'équilibre (point ou trajectoire), il tend à y revenir.**
- **Une faible perturbation des conditions initiales du système engendre une faible perturbation de sa trajectoire**



2. Théorème de stabilité

Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives

Analyse de la stabilité d'un système asservi

3. Application du théorème de stabilité aux systèmes en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + H_{BO}(s)}$$

➢**Le système asservi est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de $H_{BF}(s)$ sont à parties réelles strictement négatives.**

Equation caractéristique du système asservi : $1 + H_{BO}(s) = 0$

➢ **Le système asservi est stable ssi les racines de l'équation caractéristique sont à parties réelles strictement négatives.**

Peut-on analyser la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$ *sans* calculer explicitement la fonction de transfert en BF? *Oui!*

4. Outils d'analyse de la stabilité en BF à partir de $H_{BO}(s)$

- **Critère algébrique de Routh-Hurwitz**
- **Critère graphique de Nyquist**

Analyse de la stabilité d'un système asservi

5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz

- **Intérêt du critère**

Soit *D(s)* le dénominateur de la fonction de transfert d'un système

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad \text{avec} \quad D(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

Le *critère de Routh* permet de déterminer si les racines de l'équation caractéristique *D(s)=0* du système sont à *parties réelles négatives* ou non sans calculer explicitement ces racines.

Analyse de la stabilité d'un système asservi

5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz

- **Principe du critère de Routh-Hurwitz**

Condition nécessaire (CN) de stabilité

Une condition nécessaire de stabilité est que tous les coefficients a_i *de D(s)* soient strictement de même signe.

- **Remarque**

➢ **La méthode de Routh-Hurwitz permet de porter une conclusion sur la stabilité d'un système ; cependant, elle ne permet pas de calculer la localisation exacte des racines au dénominateur.**

➢ **Il y a deux étapes pour la méthode de Routh-Hurwitz :**

1. Générer la table de Routh

2. Interpréter la table

Analyse de la stabilité d'un système asservi

5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz

- **Principe du critère de Routh-Hurwitz**

Générer la table de Routh

Soit une fonction de transfert quelconque :

$$F(s) = \frac{N(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

On procède de la façon suivante :

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$A = \frac{a_3 a_2 - a_4 a_1}{a_3}$	$B = \frac{a_3 a_0 - a_4 0}{a_3}$	$\frac{a_3 0 - a_4 0}{a_3} = 0$
s^1	$C = \frac{A a_1 - B a_3}{A}$	$\frac{A 0 - a_3 0}{A} = 0$	0
s^0	$D = \frac{CB - A0}{C}$	0	0

Le tableau a au plus (n+1) lignes ; n : ordre de D(s))

Analyse de la stabilité d'un système asservi

5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz

- **Principe du critère de Routh-Hurwitz**

Enoncé du critère de Routh : CNS

Un système est asymptotiquement stable ssi tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont tous de même signe.

Remarques

➢ **Le nombre de changements de signe dans la première colonne est égal au nombre de pôles à parties réelles positives ;**

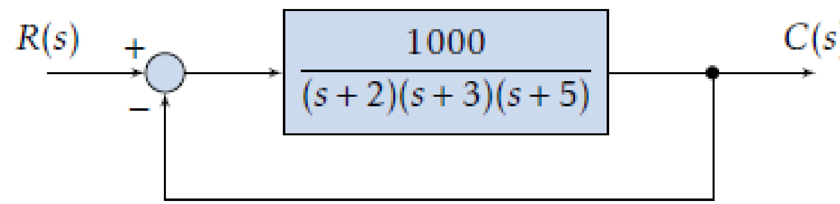
➢**Si dans la première colonne il existe un élément nul, le système admet au moins un pôle à partie réelle positive ou une paire de pôles conjugués imaginaires purs.**

Analyse de la stabilité d'un système asservi

5. Analyse de la stabilité en BF : critère de Routh-Hurwitz

- **Exemple d'application**

Soit le système suivant :



- **Créer la table de Routh.**

➢ **Premièrement, il faut réduire le système.**

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1000}{s^3+10s^2+31s+1030}$$

➢ **On crée la table de Routh**

s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}\ 1$	$\cancel{1030}\ 103$	0
s^1	$\frac{-103+31}{1} = -72$	0	0
s^0	$\frac{(-72)(103)-0}{-72} = 103$	0	0

$\leftarrow$ On peut diviser par 10 pour simplifier

<u>Note</u> **: On a deux changements de signe dans la première colonne, donc deux racines réelles positives → instable.**

Analyse de la stabilité d'un système asservi

6. Analyse de la stabilité en BF : Cas particuliers

6.1 Zéro dans la première colonne

Dans ce cas, on remplace le zéro par une variable ε, et on prend la limite lorsque ε tend vers 0^+ (ou 0^-).

Exemple

Soit le système suivant : $$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Calculer la table de Routh

- **La table de Routh est :**

$$
\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
s^3 & \cancel{0}\ \epsilon & 3.5 & 0 \\
s^2 & \frac{6\epsilon-7}{\epsilon} & 3 & 0 \\
s^1 & \frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14} & 0 & 0 \\
s^0 & 3 & 0 & 0
\end{array}
$$

- **On prend la limite :**

$$s^2 : \epsilon \to 0^+ : \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{6\epsilon - 7}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} 6 - \frac{7}{\epsilon} = -\infty < 0$$

$$s^1 : \epsilon \to 0^+ : \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14} = \frac{49}{14} > 0$$

Il y a deux changements de signe (de s^3 à s^2 et de s^2 à s^1). Le système est donc *instable.*

Analyse de la stabilité d'un système asservi

6. Analyse de la stabilité en BF : Cas particuliers

6.2 Une rangée entière de zéros

Dans ce cas, on va à la rangée précédente et on crée un polynôme *A(s)* formé des coefficients de cette rangée. On dérive alors *A(s) pour* obtenir les coefficients de la nouvelle rangée.

Exemple: **Déterminer la stabilité de la fonction de transfert suivante :**

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

- **La table de Routh est :**

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & \cancel{7}\ 1 & \cancel{42}\ 6 & \cancel{56}\ 8 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- **La troisième rangée est composée de zéros. On construit alors le polynôme :**

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

et on dérive : $$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

- **La table de Routh est alors modifiée :**

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & \cancel{7}\ 1 & \cancel{42}\ 6 & \cancel{56}\ 8 \\ s^3 & \cancel{4}\ 1 & \cancel{12}\ 3 & 0 \\ s^2 & 3 & 8 & 0 \\ s^1 & 0.333 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

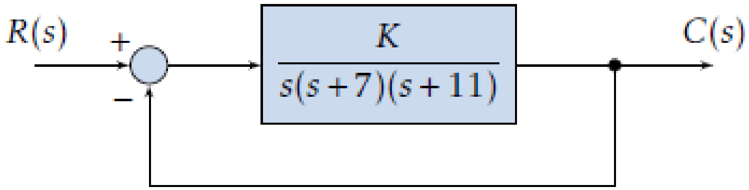
Il n’y a aucun changement de signe : le système est *stable.*

Analyse de la stabilité d'un système asservi

6. Analyse de la stabilité en BF : Cas particuliers

6.3 Design à l'aide du critère de Routh-Hurwitz

Exemple: **Soit le système suivant :**



Trouver les valeurs de K (K > 0) pour rendre le système stable, instable, et marginalement stable (limite de stabilité).

➢ **La fonction de transfert en BF:**

$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

➢ **La table de Routh est :**

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 77 \\ s^2 & 18 & K \\ s^1 & \frac{1386-K}{18} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

➢**Pour que le système soit stable, il ne doit pas y avoir de changement de signe dans la première colonne.**

$$\frac{1386-K}{18} > 0 \Rightarrow K < 1386$$

➢**Pour que le système soit instable,**

$$\frac{1386-K}{18} < 0 \Rightarrow K > 1386$$

➢**Pour que le système soit marginalement stable** ***K = 1386***

Contenu du cours IV

1. *Propriétés d'un système asservi*
2. *Stabilité*
3. ***Précision***
4. *Rapidité*

Précision des systèmes asservis

1. Définitions

L'erreur statique est la différence entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \to \infty$ pour une entrée de contrôle.

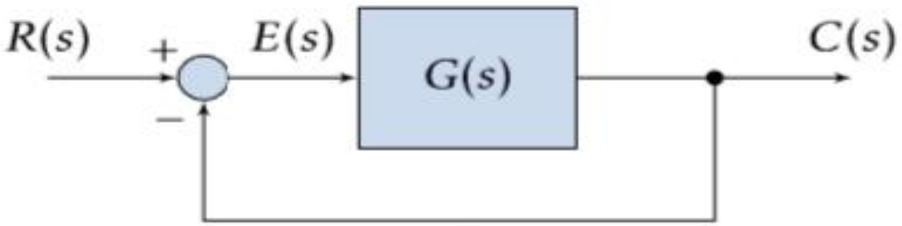
On utilise une entrée connue, comme un échelon, une rampe, ou une parabole pour caractériser la réponse du système et son erreur statique.

Le calcul de l'erreur statique n'est valide que si le système est stable.
Il faut donc s'assurer de stabiliser le système étudié avant toute considération de l'erreur statique.

Précision des systèmes asservis

2. Système à retour unitaire

Soit un système de contrôle de la forme suivante



Par définition, l'erreur statique e_{ss} est

$$e_{ss} = r(t) - c(t) = R(s) - C(s)$$

Note : L'erreur statique est définie pour un système à boucle de retour unitaire.

Précision des systèmes asservis

3. Calcul de l'erreur statique

Selon le système

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s)\left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right)$$

$$e_{ss} = r(\infty) - c(\infty) = e(\infty)$$

$$= \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s\,(R(s) - C(s))$$

$$= \lim_{s \to 0} s\, R(s)\left(1 - \frac{C(s)}{R(s)}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s\, R(s)\left(1 - \mathbf{H}_{\mathbf{BF}}(\mathbf{s})\right)$$

L'erreur statique dépend de $R(s)$

l'erreur statique est différente selon l'entrée utilisée.

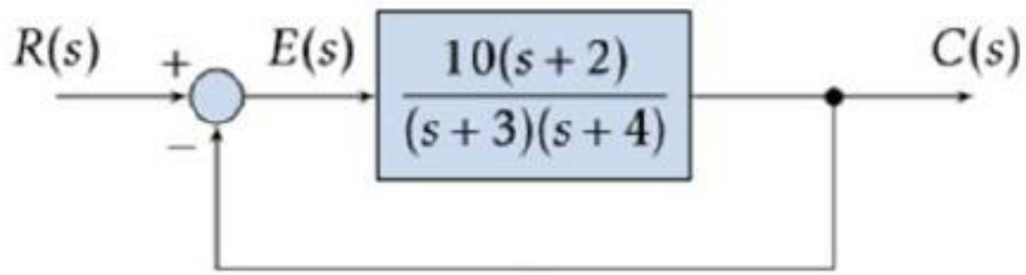
Précision des systèmes asservis

4.Exemple d'application

Entrée échelon

EXEMPLE

Calculer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire pour le système suivant :



Premièrement, on vérifie la stabilité du système.

$$T(s) = \frac{10(s+2)}{(s+3)(s+4)+10(s+2)} = \frac{10(s+2)}{s^2+17s+32}$$

Précision des systèmes asservis

4.Exemple d'application

Entrée échelon

On crée alors la table de Routh :

s^2	1	32
s^1	17	0
s^0	32	0

Le système est stable.

L'erreur statique

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \; R(s) \left(1 - T(s) \right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \; \frac{1}{s} \left(1 - \frac{10(s+2)}{s^2 + 17s + 32} \right)$$

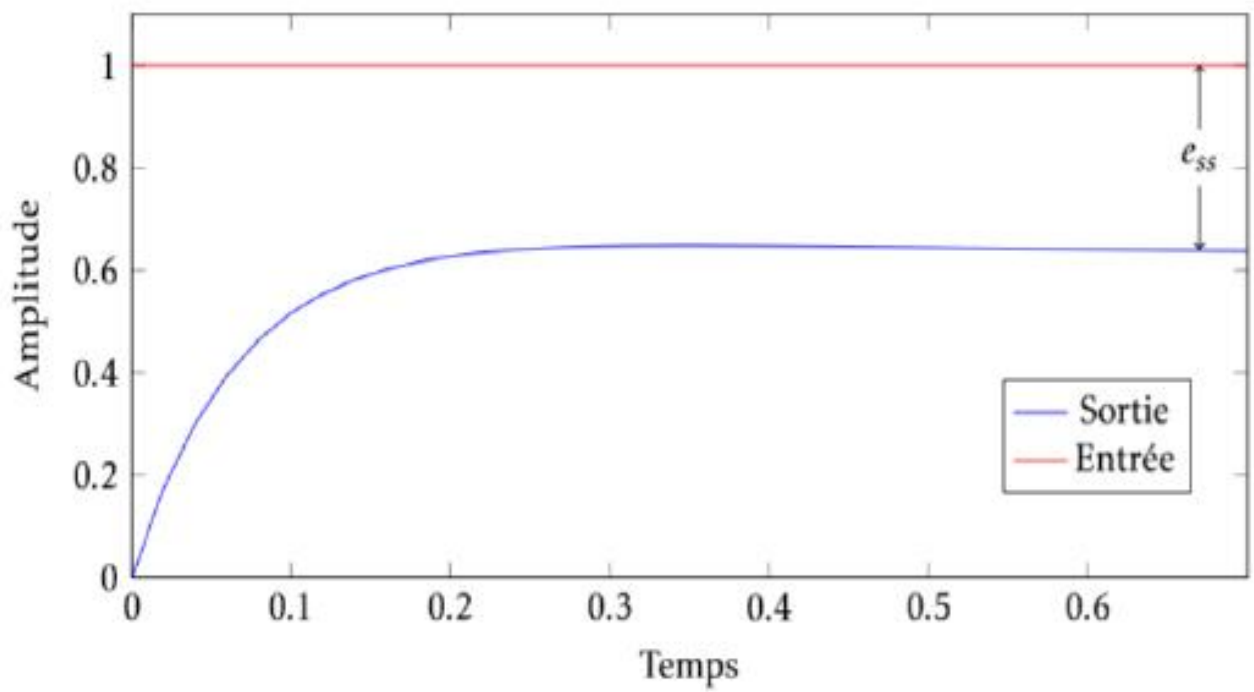
$$e_{ss} = 0.375$$

Précision des systèmes asservis

3.Exemple d'application

L'erreur statique est $e_{ss} = 0.375$

Ceci donnerait la figure suivante :



Contenu du cours IV

1. *Propriétés d'un système asservi*
2. *Stabilité*
3. *Précision*
4. *Rapidité*

Performances dynamiques.

1. Performances

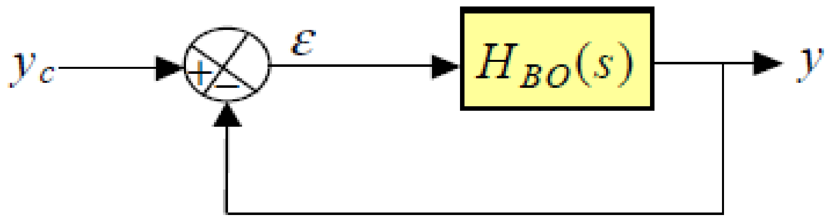
On apprécie le comportement dynamique des systèmes asservis en termes de:

- **Rapidité : temps de montée t_m, temps de réponse t_r**
- **Dépassement**

Ces performances peuvent être évaluées sur la réponse Indicielle du système asservi.

Performances dynamiques.

2. Rapidité de Système du premier ordre



$$H_{BO}(s) = \frac{K_0}{1 + T_0 s}$$

Fonction de transfert en BF

$$H_{BF}(s) = \frac{K_0}{1 + K_0 + T_0 s} \quad \Rightarrow \quad H_{BF}(s) = \frac{K_{BF}}{1 + T_{BF} s}$$

avec $K_{BF} = \dfrac{K_0}{1 + K_0}$ et $T_{BF} = \dfrac{T_0}{1 + K_0}$

K_{BF} : gain statique en BF

T_{BF} : constante de temps en BF

Performances dynamiques.

2. Système du 1^er^ ordre en BF

Rapidité

➢ **Temps de réponse en BF:**

$$t_{r,BF} = 3T_{BF} = \frac{3T_0}{1+K_0}$$

- **Le système est plus rapide en BF qu'en BO**
- **Le temps de réponse est d'autant plus petit que K_0 est grand**