

1^{ère} partie
Chapitre IV

Dipôle électrostatique

I. Définitions

Dipôle électrostatique = ensemble de deux charges électriques ponctuelles opposés $+q$ et $-q$, séparées par une distance a très petite par rapport à la distance r au point M où l'on observe leurs effets.

Moment dipolaire :

C'est le vecteur : $\vec{p} = q \cdot \vec{AB}$ dirigé de $-q$ vers $+q$.

Dans SI, p s'exprime en C.m. Cette unité étant très grande on utilise le debye(D) :

$$1D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-19} C.m$$

Exemple de dipôle : molécule polaire : H_2O

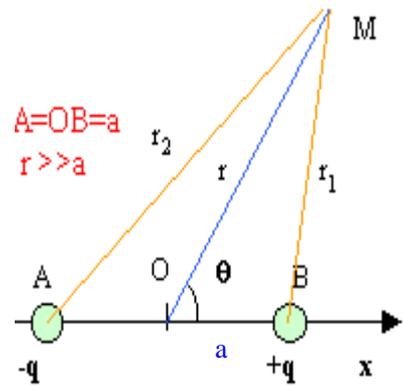
II. Potentiel créé par un dipôle

Le point M où l'on veut calculer le potentiel est repéré par ses coordonnées polaires : $r=OM$, $\theta=(Ox, OM)$.

On suppose $r \gg a=AB$, O étant le milieu de AB.

Le potentiel V créé en M par le dipôle est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{AM} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+q}{BM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$



$$\text{or : } BM^2 = (BO + OM)^2 = (OM - OB)^2 = OM^2 + OB^2 - 2OB \cdot OM \cos \theta = r^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot r \cdot \cos \theta$$

$$\text{soit : } BM = r \cdot \sqrt{1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$\text{de même en changeant } \theta \text{ en } \pi - \theta, \text{ on obtient : } AM = r \cdot \sqrt{1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$\text{D'où : } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$r \gg a$ d'où $a/r \ll 1$, on peut utiliser le développement limité au 1^{er} ordre de la forme $(1+x)^n$ ou $(1-x)^n$:

$$\text{On obtient : } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta \right) \right]$$

Où encore : $V = \frac{q.a.\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ avec $r = \overrightarrow{OM}$

Pour $\theta = \pi/2$, $V=0$ pour tous les points du plan médiateur de AB. Ce plan est une surface équipotentielle.

III. Champ électrostatique créé par un dipôle

Comme V ne dépend que de r et de θ , seules les composantes E_r et E_θ de

\vec{E} seront non nulles. On a : $\vec{E} = -grad\vec{V}$, donc :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p.\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p.\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Conclusion : Le champ créé par un dipôle est proportionnel à $\frac{1}{r^3}$ et le potentiel à $\frac{1}{r^2}$, alors que pour une charge ponctuelle, \vec{E} créé est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$ et V à $\frac{1}{r}$.

→ pour M éloigné, \vec{E} et V créés par le dipôle seront négligeable / à \vec{E} et V créés par des charges situées à proximité du dipôle.

IV. Lignes de champ et surfaces équipotentielles d'un dipôle

IV.1 Lignes de champ

Par définition, un élément $d\vec{l}$ de ligne de champ est tangent à \vec{E} . On a :

$$\vec{E} \begin{cases} E_r \\ E_\theta \end{cases}, \quad d\vec{l} \begin{cases} dr \\ r d\theta \end{cases}, \quad \vec{E} \text{ et } d\vec{l} \text{ tangents} \rightarrow \vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}, \text{ donc : } rd\theta.E_r - dr.E_\theta = 0 \rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{E_r}{E_\theta} d\theta$$

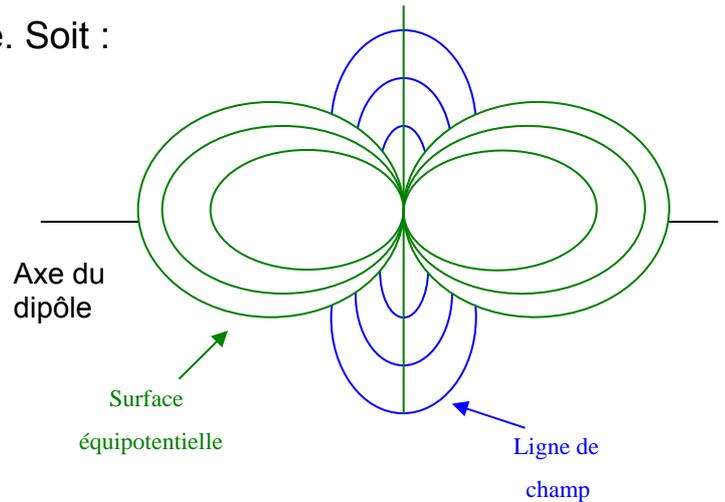
soit : $\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \rightarrow \text{Ln}r = 2.\text{Ln}|\sin\theta| + \text{Ln}k \rightarrow r = k.\sin^2\theta$

IV.2 Surfaces équipotentielles

Ensemble des points pour lesquels $V = \text{cte}$. Soit :

$$V = \frac{p \cdot \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \text{cte} \rightarrow r^2 = k' \cos \theta$$

Ce sont des surfaces de révolution autour de Ox.



V. Énergie du dipôle

V.1 Énergie interne du dipôle

C'est l'énergie contenu dans le dipôle, c'est à dire dans les deux charges $-q$ et $+q$ situées à la distance a l'une de l'autre. Elle correspond à l'énergie nécessaire pour amener une charge de l'infini à une distance a de l'autre charge.

Supposons $-q$ en A et amenons $+q$ de l'infini à B. Le travail mis en jeu est :

$$dT = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} (-dr), \quad \text{car } r \text{ décroît} \rightarrow dl < 0 \text{ et } dT < 0$$

dT correspond à la variation de l'énergie interne du dipôle. L'énergie du dipôle est alors :

$$W_0 = T = \int_{\infty}^a -\vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\infty}^a \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 a} = W_f - W_i < 0$$

V.2 Énergie du dipôle placé dans un champ E

C'est l'énergie nécessaire pour amener $+q$ et $-q$ de l'infini à leur position en B et A. On a : $T = q (V_{\text{final}} - V_{\text{initial}})$

- pour $(-q)$ on a : $T_{\infty \rightarrow A} = (-q)(V_A - 0) = -qV_A$

- pour $(+q)$ on a : $T_{\infty \rightarrow B} = (+q)(V_B - 0) = +qV_B$

donc : $W = q \cdot V_B - q \cdot V_A = q (V_B - V_A)$

Or : $dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\vec{l} \rightarrow -dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$V_A - V_B = \int_A^B -dV = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E \cdot dl \cdot \cos \alpha = E \cdot \cos \alpha \cdot \int_A^B dl = E \cdot \cos \alpha \cdot a = \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

D'où :

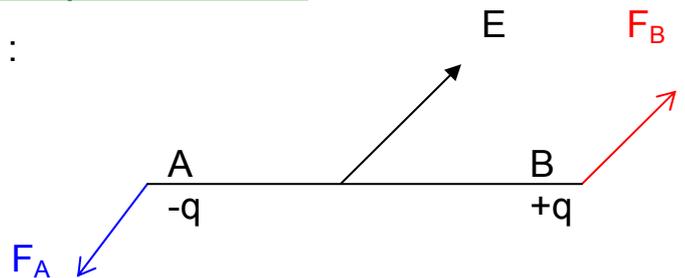
$$W_{\text{dipôle}} = q (V_B - V_A) = -q \cdot E \cdot AB = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

IV.3 Mouvement du dipôle dans un champ E uniforme

Le dipôle est soumis à un couple de forces :

Même intensité, directions différentes
et sens opposés.

Ce couple est caractérisé par son moment $\vec{\Gamma}$.



$$\vec{\Gamma} = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{OA} \wedge -q \cdot \vec{E} + \vec{OB} \wedge q \cdot \vec{E} = (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge q \cdot \vec{E} = \vec{AB} \wedge q \cdot \vec{E} = q \cdot \vec{AB} \wedge \vec{E}$$

donc :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Equilibre du dipôle :

$$\text{dipôle en équilibre} \rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{0} \rightarrow p \cdot E \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow \sin \alpha = 0$$

$\alpha = 0$: équilibre stable du dipôle ;

$\alpha = \pi$: équilibre instable du dipôle ;

Le couple tend à orienter le dipôle de façon que \vec{p} ait la même direction et le même sens que \vec{E} .

Application : Matérialisation des lignes de champ : les particules qui sont des dipôles (par exemple les grains de semoule), plongé dans \vec{E} , s'orientent en dessinant les lignes de champ.