

3. Optimisation sans contraintes

3.1 Formulation mathématique

Étant donné un ensemble χ et une fonction ¹ $f : \chi \rightarrow \mathbb{R}$.

On veut trouver un certain $x^* \in \chi$ tel que pour tout $x \in \chi$, on a: $f(x^*) \leq f(x)$. Les variables $x = \{x_i\}$ sont appelées les variables de décision ou de commande. On s'intéresse qu'aux cas où x est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ définie par des contraintes.

$$(Pb) \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ h_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, p \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = p+1, \dots, m \end{cases}$$

Les fonctions $h_i(x)$ et $g_i(x)$ sont les contraintes. La nature du problème (Pb) dépend de la nature des fonctions f , h_i , g_i et les variables x_i .

- Quand $m = 0$, le problème est dit sans contrainte.
- Si toutes les fonctions f , h_i , g_i sont linéaires, alors le problème est dit *Programmation linéaire*.
- Si f est linéaire et quadratique et les fonctions h_i et g_i sont linéaires, alors le Pb est dit *programmation quadratique*.
- Quand f est une fonction convexe et les fonction h_i et g_i forment un ensemble convexe, alors le problème Pb est dit *programmation convexe*.

R Une propriété importante du Pb de programmation convexe est que toute solution locale est aussi globale.

- Si les variables ne peuvent prendre que des valeurs entières, alors le problème Pb est dit *programmation entière*.
- Quand la fonction f est non linéaire et h_i et g_i sont aussi non linéaires, alors le problème Pb est dit *programmation non linéaire*.

¹Appelée aussi critère, fonction d'objectif ou fonction de coût

3.2 Optimisation sans contraintes

3.2.1 Introduction

Étant donnée la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, alors le problème d'optimisation consiste à trouver $x^* \in \mathbb{R}^n$ solution du problème

$$\min f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Définition 3.2.1 On dit que le point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, si et seulement si:

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f sur $\mathbb{R}^n$, si pour un certain $\xi > 0$, on a

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x^*, \xi)$$

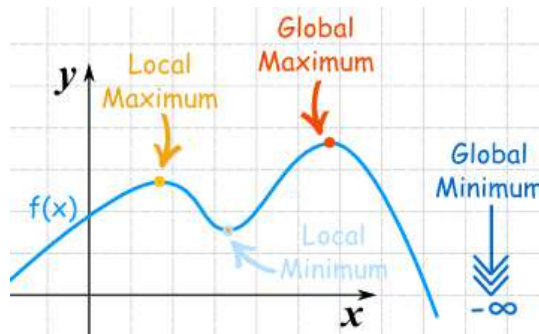


Figure 3.1: Minimum et maximum

R Un problème de maximisation peut toujours être réduit à un problème de minimisation en remplaçant le problème:

$$\max f(x) \quad \text{par} \quad \min -f(x)$$

3.2.2 Conditions d'optimalité

Avec quelques préliminaires vus dans le chapitre précédent, on est prêt à commencer à discuter la théorie de l'optimisation sans contrainte pour les fonctions différentiables. On commence par les conditions mathématiques qui doivent tenir à un optimum local sans contrainte.

Théorème 3.2.1 — Conditions nécessaires pour un optimum sans contraintes. Les conditions nécessaires pour un optimum sans contrainte en x^* sont:

i - Si f est différentiable en x^* , alors:

$$\nabla f(x^*) = 0$$

On dit que x^* est un point **stationnaire** ou **critique**.

ii - Si f est deux fois différentiable en x^* , alors le Hessien de f est **semi-défini positif**.

R L'exemple $f(x) = x^4$ montre qu'on a pas mieux que le caractère semi-défini positif de la Hessienne, même si x^* est un minimum global. L'exemple $f(x) = x^3$ montre que ce théorème donne une condition nécessaire mais pas suffisante.

■ **Exemple 3.1** Soit la fonction $f(x, y) = x^4 + y^4 - xy + 2$, les points critiques de f se calculent en résolvant le gradient associé. $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (4(x^3 - y), 4(y^3 - x))^T = (0, 0)^T$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

Les points critiques seront $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. ■

Exercice 3.1 Trouver les points critiques pour les fonctions suivantes:

- $f(x, y) = \sin(x^2 + y) + y$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$
- $f(x, y) = |x| + |y|$

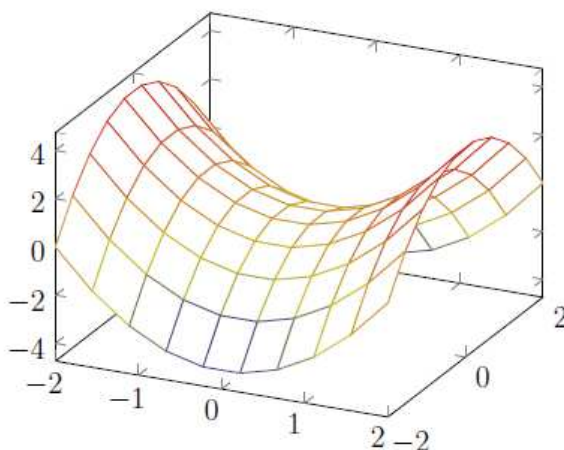


Figure 3.2: Un point selle en 3D

Théorème 3.2.2 — Condition suffisante pour un minimum. Les conditions suffisantes incluent aussi les conditions nécessaires mais on ajoute d'autres conditions qui nous permettent de conclure qu'il y a un optimum. Pour un minimum:

$\nabla f(x^*) = 0$, $f(x)$ différentiable en x^* , en plus $\nabla^2 f(x^*)$ est définie positive.

Théorème 3.2.3 — Condition suffisante pour un maximum. Pour un maximum:

$\nabla f(x^*) = 0$, $f(x)$ différentiable en x^* , en plus $\nabla^2 f(x^*)$ est définie négative.

Une fois qu'un point est identifié comme un point critique, la procédure qui suit consiste à trouver la nature de ce dernier en examinant la matrice Hessienne. Avant de commencer, la question qui peut se poser c'est la signification d'une matrice Hessienne définie positive ou négative. Si le Hessien est défini positif, ceci signifie que la courbure de la fonction est partout positive. Ceci sera une condition importante pour vérifier si on a un minimum, et

vice versa pour vérifier si on a un maximum.

Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de deux variables avec un point critique x^* . On définit $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ le déterminant de f avec $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Alors si:

- Si $D > 0$ et $f_{xx} > 0$, alors x^* est un minimum local.
- Si $D > 0$ et $f_{xx} < 0$, alors x^* est un maximum local.
- Si $D < 0$, alors le point x^* est un point selle.
- Si $D = 0$ on ne peut rien dire. Ici on aura besoin des dérivées plus élevées pour déterminer la nature du point critique.

■ **Exemple 3.2** La fonction $f(x, y) = x^3/3 - x - (y^3/3 - y)$ a un graphe qui ressemble à une serviette (Fig 3.3). Le gradient $\nabla f(x, y) = (x^2 - 1, -y^2 + 1)^T$. La fonction admet 4 points critiques $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$. La matrice Hessienne qui inclue toutes les

dérivées partielles $H = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -2y \end{bmatrix}$

- Pour $(1, 1)$, on a $D = -4$, d'où on a un point selle.
- Pour $(-1, 1)$, on a $D = 4$, $f_{xx} = -2$, alors on a un maximum local.
- Pour $(1, -1)$, on a $D = 4$, $f_{xx} = 2$, alors on a un minimum local.
- Pour $(-1, -1)$, on a $D = -4$, d'où on a un point selle. Donc, la fonction a un minimum local, un maximum local et deux points selles.

■

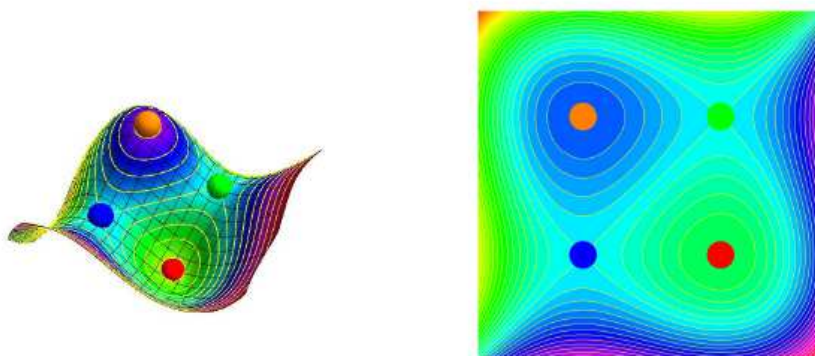


Figure 3.3: Points critiques de Exemple. 3.2

Exercice 3.2 — Examen semestriel 2015. Soit f la fonction définie par

$$f : x \in \mathbf{R}^2 \mapsto f(x, y) = 2 + xy - x^2y - xy^2$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Calculer la matrice Hessienne correspondante.
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice Hessienne.
5. On considère la fonction g définie par:

$$g(x, y) = 2 + e^{x+y} - e^{2x+y} - e^{2y+x}$$

En déduire les extréma de g .