

5. Annale et Travaux pratiques

Dans le présent chapitre, quelques sujets de contrôle, d'examen, de rattrapage ainsi que des travaux pratiques sont proposés pour différentes spécialités (Automatique, électronique et réseaux) et cycles (première et deuxième année Master).

5.1 Sujets de contrôle et TP

5.1.1 Contrôle sous Matlab: Master I REEI 2015

Soit à minimiser la fonction suivante:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 10(x^2 - y)^2$$

Afin de trouver ces minimums numériquement, on souhaite utiliser la méthode du gradient de la plus forte pente à pas optimal et à pas approximatif par le biais de la méthode backtracking.

Pas optimal

- Définir analytiquement le pas optimal pour la fonction f .
- Déclarer une fonction $DF = \text{gradient}F(x)$ permettant de calculer le gradient de f .
- Déclarer une fonction $\alpha = \text{pasOptimal}(x)$ permettant de calculer le pas optimal de f .
- Programmer la méthode du gradient à pas optimal pour un nombre d'itération $\text{nb}=500$ et un critère d'arrêt inférieur à 0.001. Ici, prendre le critère d'arrêt comme la norme du gradient de f et $X0=[3,3]$.
- Tracer les itérations dans le tracé des contours

Pas optimal

Dans un autre dossier,

- Déclarer une fonction $DF = \text{gradient}F(x)$ permettant de calculer le gradient de f .
- pour $\rho = 0.4$ $\beta = 0.5$ un nombre d'itération $\text{nb}=500$ et un critère d'arrêt inférieur à 0.001 et $X0=[3,3]$, programmer la méthode de backtracking.
- Tracer les itérations dans le tracé des contours

5.1.2 Contrôle sous Matlab: Master I REEI 2015

Problème des moindres carrés

L'objectif de ce contrôle est d'identifier les paramètres d'un modèle sphérique de trois variables par la méthode des moindres carrés.

Le modèle théorique approximant les points expérimentaux est donné par

$$z = x_1 + (x_2^2 - (y - x_3)^2)^{-1/2}$$

avec z est la sortie et y est l'entrée. L'ensemble des points expérimentaux est regroupé dans le tableau suivant:

y	z
0.0000	5.8776
0.0974	5.7608
0.2042	5.5878
0.3900	5.7680
0.3911	6.0966
0.5092	6.3744
0.5972	5.9919
5.2431	6.4085
5.8022	5.9953
5.6136	5.7521
5.7435	5.6481
6.1645	5.6582
6.1940	5.5383

Partant de $[x_1, x_2, x_3] = [1, 1, 1]$ et pour un nombre d'itération $nbrt = 100$ et un test d'arrêt de la norme des erreurs entre les x_i inférieur à 0.001, trouver les valeurs de x_i par la méthode de Gauss-Newton.

Afin de réduire le temps de calcul, à cette méthode, on rajoute un pas optimal α_k qui doit vérifier le critère de Armijo en utilisant la technique de backtracking.

Reprogrammer la méthode de gauss-Newton avec le pas optimal et comparer les résultats.

5.1.3 Contrôle sous Matlab: Master II Automatique 2015

Questions cours :

1. Montrer que la fonction $f(x) = e^{(x-1)^2}$ est une fonction convexe.
2. Citer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point soit un point localement optimal.
3. Donner deux méthodes pour vérifier qu'une matrice soit semi défini positive.
4. Quelle est la relation entre la convexité et la matrice Hessienne.
5. Soit à minimiser la fonction suivante :

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y+2)^2$$

- a. Sans calculer le gradient, démontrer que $x = 2$ et $y = -2$ sont les minimum de la fonction f .
- b. Afin de trouver ces minimum numériquement, on souhaite d'utiliser la méthode du la plus forte pente à pas optimal et à pas approximatif
 - i. Donner la définition de chaque méthode
 - ii. Trouver le pas optimal de f .

Exercice

Soit la fonction d'objective :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points stationnaires de f .
3. Calculer la matrice Hessienne correspondante
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice Hessienne.
5. Déduire les extrema de $g(x,y) = \frac{e^{x^4} e^{y^4} e^2}{e^{4xy}}$

Partie 2 (Durée 30min)

Numériquement et à l'aide de Matlab, nous souhaitons de chercher l'optimum de la fonction donnée par la question de cours numéro 5. A cette fin, nous allons utiliser l'algorithme de Newton avec backtracking dont l'algorithme reste similaire avec l'algorithme de gradient avec backtracking avec la différence dans la direction donnée par :

$$d_k = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} * \nabla f(x_k)$$

1. Visualiser cette fonction en 3D avec Matlab. On utilisera pour cela les fonctions mesh-grid et surf. La marge de variation de x est de -2 à 6 et y est de -6 à 2 avec un pas de 0.2
2. Tracer les niveaux de la fonction (tracer des contours) en 2D, et indiquer sur chaque contour le correspondant niveau en utilisant la commande clabel, ceci pour le

suivants

niveaux 0.02, 1, 3, 5, 10.

3. Ecrire un programme fonction (nommée FGH) dont les paramètres de sortie seront de la fonction, le gradient et le hessien de la fonction et le paramètre sera le vecteur des variables.
4. Ecrire un programme fonction (nommée NewtonBacktracking) qui a comme paramètre de sortie la valeur de la fonction au minimum et les variables itératives. Les paramètres de sortie seront : $X0$, nbr_iter , ρ , β et ϵ le critère de convergence.
5. Sur le tracé des contours, faites aussi le tracé des variables. Le teste d'arrêt dépend de la différence entre deux variables successives.
6. Valeurs numériques : $X0=[2;2]$; $\rho=0.1$; $\beta=0.5$, $nbr_iter=100$, $\epsilon=0.01$

5.1.4 Contrôle 1: Master I Commande des machines 2016**Questions de cours**

1. Soit la matrice A donnée par:

$$A = \begin{bmatrix} b & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quelle doit être la valeur de b pour que la matrice A soit définie positive.

2. Quelle est la relation entre la convexité et la définie positivité de la matrice Hessienne.
3. Quel est l'avantage qu'on peut tirer d'une fonction convexe.
4. Soit la fonction suivante à minimiser par la méthode du gradient:

$$f(x, y) = x^2 + y$$

Montrer que $d_k = -(\nabla^2 f(x, y))^{-1} \nabla f(x, y)$ est une direction de descente.

5. Trouver le pas optimal pour cette fonction
6. La fonction est-elle convexe? justifier la réponse.
7. On veut résoudre le système d'équations: $Ax = b$. Ceci peut se transformer en un problème d'optimisation où la fonction à minimiser est $Ax - b$ par la méthode du gradient conjugué. Montrer que le pas optimal de cette méthode est donnée par: $\alpha = \frac{g'_k d_k}{d'_k A d_k}$ avec g_k et d_k sont le gradient et la direction de descente, respectivement.

Exercice 1

On se basant sur un ensemble de données expérimentales on veut approximer ces données

t	1	2	3	4	5
y	10	20	40	89	190

par un modèle théorique $\phi(x, t_i) = x_1 e^{x_2 t}$ où x_1 et x_2 sont des paramètres à identifier en utilisant la méthode de Gauss-Newton.

1. Ecrire la fonction résiduelle R .
2. Ecrire le Jacobien J de R .
3. Dans la méthode de Gauss-Newton, il apparait le terme $(J'J)^{-1}$ qui n'est pas toujours inversible. Proposer une solution à cette quantité pour qu'elle soit inversible.

Exercice 2

Soit la fonction à minimiser:

$$f(x, y) = 2 + xy - x^2 y - xy^2$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Calculer la matrice Hessienne correspondante.
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice Hessienne.
5. On considère la fonction g définie par:

$$g(x, y) = 2 + e^{x+y} - e^{2x+y} - e^{2y+x}$$

En déduire les extréma de g .

5.1.5 Contrôle 2: Master I Commande des machines 2016**Questions de cours**

1. Montrer que la fonction $f(x) = e^{(x-1)^2}$ est une fonction convexe.
2. Citer les conditions nécessaires pour qu'un point soit un point localement optimal.
3. Quelle est la condition suffisante pour le point critique soit un maximum.
4. Donner deux méthodes pour vérifier qu'une matrice soit semi définie positive.
5. Quelle est la relation entre la convexité et la matrice Hessienne.
6. Soit à minimiser la fonction suivante :

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$$

- a. Sans calculer le gradient, démontrer que $x = 1$ et $y = 0$ sont les extréma de la fonction f .
- b. Afin de trouver ces extréma numériquement, on souhaite utiliser la méthode du la plus forte pente à pas optimal et à pas approximatif
 - i. Donner la définition de chaque méthode
 - ii. Trouver le pas optimal de f .

Exercice 1

On se basant sur un ensemble de données expérimentales on veut approximer ces données

t	1	2	3	4	5
y	1	25	55	102	300

par un modèle théorique $\phi(x, t_i) = e^{x_1^2 + x_2 t_i}$ où x_1 et x_2 sont des paramètres à identifier en utilisant la méthode de Gauss-Newton.

1. Ecrire la fonction résiduelle R .
2. Ecrire le Jacobien J de R .
3. Dans la méthode de Gauss-Newton, il apparaît le terme $(J'J)^{-1}$ qui n'est pas toujours inversible. Proposer une solution à cette quantité pour qu'elle soit inversible.

Exercice 2

Soit la fonction à minimiser:

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2 + 2$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Calculer la matrice Hessienne correspondante.
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice Hessienne.
5. On considère la fonction g définie par:

$$g(x, y) = \frac{e^{x^4} e^{y^4} e^2}{e^{4xy}}$$

En déduire les extréma de g .

5.1.6 Contrôle 3: Master I Commande des machines 2016**Problème**

Soit le problème d'optimisation avec contraintes suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ & h(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ & g(x) = x_3 \geq a \text{ avec } a \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Dans un premier temps considérons le problème sans la contrainte d'inégalité

1. Ecrire la condition d'optimalité du premier ordre et calculer les points critiques. (3 points)
2. Que peut-on conclure sur la nature des points critiques. (3 points)

Considérons maintenant le problème original, alors:

1. Donner les conditions d'optimalité de KKT du premier ordre et étudier l'existence de la solution en fonction du paramètre a . (8 points)
2. Étudier la nature du point critique si $a = 1$. (6 points)

5.1.7 Contrôle 1 sous Matlab: Master I Automatique 2016

Exercice 1

Soit la fonction à minimiser par la méthode de Quasi-Newton donnée par:

$$f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + \exp(x)$$

Rappelons que le principe de cette méthode est d'approximer l'inverse de la matrice Hessienne par des formules qui ne nécessitent pas le calcul coûteux de l'inverse. La première formule est proposée par Davidon, Fletcher et Powell (DFP) donnée par:

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

La deuxième formule est proposée par Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno (BFGS) donnée par:

$$H_{k+1} = H_k + \left(1 + \frac{y_k^T H_k y_k}{y_k^T s_k}\right) \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{s_k y_k^T H_k + H_k y_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

où $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ et $s_k = x_{k+1} - x_k$. Initialement, les matrices H_0 sont initialisées à l'identité. On rappelle que la méthode de Quasi-Newton consiste à itérer le processus suivant:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k H_k \nabla f(x_k)$$

avec le pas α_k est calculé approximativement par la méthode de backtracking vérifiant le critère de Armijo.

1. Créer un programme *function [f,g]=objectiffunction(x)* qui permet de retourner la valeur de f et le gradient g pour l'entrée x .
2. Créer un programme *function [x,f,n]=QuasiNewton(fun,x0,nit,eps,par)* qui permet de donner les valeurs des itérations x_i , la valeur de la fonction à l'optimum f et n sera le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la convergence. Quand aux paramètres d'entrée, fun sera la fonction d'objectif, x_0 la condition initiale, nit le nombre d'itération, eps est le seuil de convergence et par est un paramètre de sélection entre les deux approches, quand $par = 1$ on sélectionne l'approche de DFP, quand il est différent à 1, on sélectionne la deuxième.
3. Faire le tracé des contours pour les niveaux $[0.85, 1.5, 2.5, 5, 10, 15]$ et sur cette même figure, tracer des itérations x_i . Ici, on fixe l'axe x et y à $[-4, 4]$

Exercice 2

Le tableau ci-dessous reporte la moyenne des températures en Fahrenheit par mois pour la ville Monroe Louisiana (USA):

Mois	56	60	69	77	84	90	94	94	88	79	68	
Température	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Aout	Septembre	Octobre	Novembre	D

Table 5.1: Données réelles

Ces données ont la tendance d'avoir une forme sinusoïdale où l'objectif sera d'identifier les paramètres de la fonction sinusoïdale suivante:

$$\phi(x, t) = x_1 * \cos(x_2 t + x_3) + x_4$$

Écrire un programme script qui permet d'identifier les bons paramètres x_1 , x_2 , x_3 et x_4 par la méthode des moindres carrés en appliquant l'algorithme de Gauss-Newton. Les points de départ de l'algorithme $x_0 = [15; 0.4; 10; 1]$ et la variable t représente les mois, par exemple, $t=1$ pour dire le mois Janvier, $t=2$ pour Février et ainsi de suite. A cet algorithme on applique le pas α_k qui sera encore une fois approximé par la méthode de backtracking vérifiant le critère de Armijo. Pour le teste d'arrêt, on veut que le programme s'arrête dès que la norme du résiduel devient inférieure à 4.7.

5.1.8 Contrôle 2 sous Matlab: Master I Automatique 2016**Problème**

Soit le problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$Pb \begin{cases} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ h(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 = 6 \\ g(x_1, x_2) &= (x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x_2 - 2)^2 \leq 1 \end{cases}$$

1. Donner la condition d'optimalité nécessaire du premier ordre de f sous h et g .
 2. Par l'utilisation des conditions de KKT, donner la condition nécessaire du second ordre ainsi que les conditions suffisantes.
 3. Que peut-on conclure sur la nature du l' extréma trouvé.
- P.S les solutions de l'équation $7x^2 - 22x + 16 = 0$ sont $x = (1.14, 2)$

5.1.9 Contrôle 1 sous Matlab: Master II Automatique 2016

Exercice 1

On veut minimiser la fonction d'objective donnée par:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Pour cet objectif, on combine l'avantage des deux méthodes; méthode de la plus forte pente lorsque la matrice Hessienne n'est pas définie positive, et dès qu'elle devient définie positive, on alterne vers la méthode de Newton. La commande matlab qui permet de tester la définie positivité de la matrice est *chol* (plus de détail, voir help chol (3ième paragraphe)). L'objectif final sera le tracé des itérations x_i et le tracé des contours de la fonction dans la même figure. Pour achever cet objectif réalisez les étapes suivantes:

1. Écrire un programme *function* $[f, g, h] = fun_obj(x)$ qui permet de retourner la valeur de la fonction f , le gradient g et le Hessien H évalués à x .
2. Écrire un autre programme *function* $[x, f, n] = Newton_gradient(fun, x0, nit, eps)$ qui permet de combiner entre la méthode de Newton et la méthode de gradient où l'alternance entre les deux méthodes est expliquée auparavant. Pour les deux méthodes, on utilise un pas approximatif vérifiant le critère de Armijo en utilisant la méthode de backtracking. Le premier argument d'entrée est la fonction d'objective qu'on veut minimiser, lors d'exécution de ce programme sera affectée à la fonction qu'on a déclaré avant *fun_obj*, x_0 est la condition initiale: $[0; 15]$, *nit* est le nombre d'itération sera fixé à 100 itérations et *eps* est le seuil de convergence pour arrêter le programme. Ici, on souhaite que le test d'arrêt s'applique sur la norme de la direction des deux méthodes.
3. Dans un autre programme script, faites le tracé de la fonction en 3D en limitant les axes de x_1 et de x_2 à $[-2, 2]$. Ensuite, représentez le tracer des contours aux niveaux suivants $[0.08, 2, 3, 5, 10]$. Sur ce programme, appelez la fonction d'objective avec les même paramètres d'avant et sur la même figure des contours, tracer les itérations x_1 en fonction des x_2 .

Exercice 2

Soit un ensemble de données reportées dans le Tableau I: A partir de ces données, on

t_i	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
y_i	0	10	20	40	60	68	77	110

Table 5.2: Données réelles

souhaite les approximer par une fonction polynomiale cubique donnée par:

$$\phi(x, t) = x_1 t^3 + x_2 t^2 + x_3 t + x_4$$

Ecrire un programme script qui permet d'identifier les bons paramètres x_1, x_2, x_3 et x_4 par la méthode des moindres carrés en appliquant l'algorithme de Gauss-Newton. Les points de départs de l'algorithme $x_0 = [1, -8.5, 38, -4]$. Pour le test d'arrêt, on veut que le programme s'arrête dès que la norme du résiduel devient inférieure à 16.5.

5.2 Examens et Rattrapages

5.2.1 Examen M1 REEI 2015

Questions de cours: (5 points)

1. Soit une matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \alpha \\ -1 & 2 & -1 \\ \alpha & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Trouver les valeurs de α pour que la matrice A soit définie positive.
 - Pour les valeurs de α trouvées, vérifier la définie positivité de la matrice A par d'autres méthodes.
2. Supposons que α est égal à l'un des valeurs définies précédemment et soit f une fonction quadratique définie par:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$$

avec $x \in \mathbb{R}^3$ est b un vecteur réel constant.

- Calculer la matrice Hessienne de la fonction f .
 - En déduire la convexité de la fonction f .
 - Que peut-on conclure à propos des extréma de cette fonction.
3. Soit à minimiser la fonction $g(x, y) = (x+1)^2 + (y+2)^2$ par la méthode du gradient.
- Rappeler l'équation récurrente de la méthode du gradient à pas fixe.
 - Calculer (x_1, y_1) et (x_2, y_2) pour $x_0 = 1, y_0 = 1$ avec le pas $\alpha = 1$.
 - Calculer le pas optimal $\hat{\alpha}$ pour cette fonction.
4. Montrer que la fonction g est convexe.

Exercice 1: Optimisation sans contraintes (5 points)

On considère la fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

- Déterminer les points critiques de f .
- Calculer la matrice Hessienne de f .
- En déduire la nature de ces points critiques.
- Soit la fonction g définit sur $\mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = \frac{e^{x^3} e^{y^3}}{e^{3x} e^{3y}}$$

En déduire les points critiques de g

Exercice 2: Optimisation avec contraintes d'égalité (5 points)

Soit le problème d'optimisation avec contrainte:

$$Pb \begin{cases} \min f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 \\ h_1(x, y) \equiv x_1 + x_2 = 2 \\ h_2(x, y) \equiv x_2 - x_1 = 0 \end{cases}$$

1. Écrire le Lagrangien du problème Pb .
2. Donner la première condition d'optimalité.
3. Est ce que le point critique est un point régulier.
4. Donner la seconde condition d'optimalité en déduisant la nature du point critique s'il existe.

Exercice 3: Optimisation avec contraintes d'égalité et d'inégalité (5 points)

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$Pb \begin{cases} \min u(x, y) = x^2 + y^2 + xy \\ g_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 \leq 1 \\ g_2(x, y) \equiv x + y \geq 1 \end{cases}$$

1. Donner la condition d'optimalité nécessaire du premier ordre de u sous g_1 et g_2 .
2. Par l'utilisation des conditions de KKT, donner la condition nécessaire du second ordre ainsi que les conditions suffisantes.
3. Que peut-on conclure sur la nature du l'extrême trouvé.

5.2.2 Examen MII Automatique 2015**Exercice 1 (5 points)**

Soit f la fonction définie par

$$f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) = 2 + xy - x^2y - xy^2$$

1. Calculer le gradient de f .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Calculer la matrice Hessienne correspondante.
4. Pour chacun des points critiques de f , donner les conclusions tirées de l'examen de la matrice Hessienne.
5. On considère la fonction g définie par:

$$g(x, y) = 2 + e^{x+y} - e^{2x+y} - e^{2y+x}$$

En déduire les extréma de g .

Exercice 2 (4 points)

Soient les deux fonctions $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

1. Trouver les extréma de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = \frac{2}{3}$.
2. Trouver les extréma la fonction g sous la contrainte $f(x, y) = 9$.

P.S Pour chaque cas, vérifier les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Exercice 3 (4 points)

Soit n un entier $n \geq 2$. On considère n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, pour $i = 1, \dots, n$, non tous égaux, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

1. Démontrer que f n'admet qu'un seul point critique $(\hat{a}, \hat{b})$
2. Exprimer $\hat{b}$ en fonction de $\hat{a}$.
3. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (7 points)

Soit le problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$Pb \begin{cases} f(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ h(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 = 6 \\ g(x_1, x_2) &= (x_1 - 1)^2 + \frac{1}{3}(x_2 - 2)^2 \leq 1 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement sur le tracé des contours la zone admissible
2. Donner la condition d'optimalité nécessaire du premier ordre de f sous h et g .
3. Par l'utilisation des conditions de KKT, donner la condition nécessaire du second ordre ainsi que les conditions suffisantes.
4. Que peut-on conclure sur la nature du l' extréma trouvé.

P.S les solutions de l'équation $7x^2 - 22x + 16 = 0$ sont $x = (1.14, 2)$

5.2.3 Examen Master I et II Automatique 2016

Questions de cours (5 Points)

1. Soit la matrice suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & b & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Quelle est la plus petite valeur de b pour que la matrice A soit semi-définie positive.
- 2. Si la matrice Hessienne d'une fonction ne dépend d'aucune variable (contient que des constants) et elle est définie-positive, alors que peut-on conclure sur la nature du point critique s'il existe.
- 3. Soit la fonction de deux variables suivante:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

- (a) La fonction est-elle convexe? Justifier.
- (b) Montrer que $d_k = (-x_k, -y_k)^T$ est une direction de descente pour cette fonction.
- (c) Trouver les extréma de cette fonction et leurs natures.
- (d) Reformulant maintenant la fonction pour quelle soit égale à:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

Trouver le pas optimal pour cette nouvelle fonction. Que peut-on conclure sur le résultat trouvé.

4. Soient les deux fonctions suivantes: $h_1(x) = -3x_1^2 - 4x_2 + x_3^2$ et $h_2(x) = 3x_1 + 2x_2 - x_3$ et soit $x^* = (1, 2, 1)^T$. Est-ce que x^* est un point régulier pour h_1 et h_2 .

Exercice 1 (5 points)

Soient les deux fonctions $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

1. Trouver les extréma de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = \frac{2}{3}$.
2. Trouver les extréma la fonction g sous la contrainte $f(x, y) = 9$.
3. Pour chaque cas, tirer la nature des extréma trouvés.

Exercice 2 (droite des moindres carrés) (3 points)

Soit n un entier, $n \geq 2$. On considère n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, pour $i = 1, \dots, n$ non tous égaux, et la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

1. Trouver le système d'équation qui permet de calculer les valeurs optimales $\hat{a}$ et $\hat{b}$ (condition d'optimalité de premier ordre).
2. Exprimer $\hat{b}$ en fonction $\hat{a}$.
3. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (7 points)

On souhaite maximiser le problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - 2xy - 2y \\ h(x, y) \triangleq x = 0 \\ g_1(x, y) \triangleq y \geq 0 \\ g_2(x, y) \triangleq x + y \leq 1 \end{array} \right.$$

1. Calculer l'extrême du problème en rappelant les conditions nécessaires de KKT du premier ordre.
2. Trouver la nature du l'extrême trouvé.

5.2.4 Rattrapage MI, MII Automatique et MI Commande des machines 2017**Questions de cours (7 Points)**

Soit à minimiser la fonction quadratique suivante:

$$f(x) = x^T A x - b^T x$$

avec $x \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ matrice carrée et $b \in \mathbb{R}^3$.

1. Quelle est la condition sur la matrice A pour que le problème admette un minimum global?
Justifier votre réponse.
2. On souhaite utiliser la méthode du gradient pour trouver l'optimum de $f(x)$.
 - (a) Calculer la direction de descente pour cette fonction.
 - (b) Définir l'équation récurrente de cette méthode (x_{k+1}) en fonction de x_k , le pas α , A et b .
 - (c) Calculer la direction à l'instant x_{k+1} .
 - (d) Donner l'expression du pas optimal en fonction de x_k , A et b en considérant que la matrice A est une matrice symétrique et inversible.
 - (e) Simplifier l'expression du pas optimal en fonction de la matrice A et du gradient de $f(x)$ noté par d_k .

Exercice 2 (6 points)

La mesure de la tension aux bornes d'un dipôle a donné les valeurs suivantes:

t (s)	0	3	4
U (Volts)	-8.0	4	0

On suppose que cette tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible en utilisant les méthodes des moindres carrés.

1. Estimer à partir de ces données le degré maximal du polynôme $U(t)$ qui approxime au mieux les données du tableau.
Exemple: Si $U(t)$ est un polynôme de degré 4, il est donné par:

$$U(t) = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

2. Donner l'instant t où la tension $U(t)$ atteint son maximum en fonction des paramètres a_i .
3. Rappelons que l'expression de la méthode de Gauss-Newton pour résoudre le problème des moindres carrés est donnée par:

$$x_{k+1} = x_k - (J^T J)^{-1} J^T R$$

- (a) Donner l'expression du vecteur résiduel R en fonction des paramètres a_i du polynôme trouvé dans la question précédente.
- (b) Donner l'expression du Jacobien J en fonction des mêmes paramètres que précédemment.

Exercice 3 (7 points)

On veut minimiser le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité et d'inégalité suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(x, y) = x^2 - y \\ \quad \quad h(x, y) \triangleq x + y = 2 \\ \quad \quad g_1(x, y) \triangleq x^2 + y^2 \leq 4 \\ \quad \quad g_2(x, y) \triangleq x \geq 1 \end{array} \right.$$

Faire l'analyse nécessaire pour trouver l'optimum de ce problème et sa nature en rappelant les conditions du premier et du deuxième ordre de KKT.

5.3 Bibliographie

- [1] **R. Fletcher**. Practical Methods of Optimization, 2nd Edition; ISBN: 978-0-471-49463-8. May. 2000.
- [2] **Frédéric de Gournay et Aude Rondepierred**. Introduction à l'optimisation Numérique. INSA, Toulouse.
- [3] **Laurent Guillopé**. Optimisation sous contrainte. Université de Nantes. 2015/2016.
- [4] **Josefa Cánovas Cánovas, María Sempere Orts, Víctor Huertas Navarro**, Optimización matemática aplicada. Enunciados, ejercicios y aplicaciones del mundo real con MATLAB. 2011.