Devoir : l'intégrale d'Itô

Notations. $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard issu de 0, $(\mathcal{F}_t)$ une filtration vérifiant les conditions habituelles pour laquelle B est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien. Comme dans le cours, $\mathcal{H}_T^2$ désigne la classe des intégrands vérifiant les propriétés du cours, $\Delta_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ pour une subdivision (t_i), et Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On rappelle que si $G \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[G^4] = 3\sigma^4$ et $\mathbb{E}[G^6] = 15\sigma^6$.

Exercice 1 — Une stratégie simple (5 points)

Sur [0,3], on considère le processus

$$H_s = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < s \leq 1, \\ \mathbf{1}_{\{B_1>0\}} & \text{si } 1 < s \leq 2, \\ B_2 & \text{si } 2 < s \leq 3, \end{cases}$$

et on note $I_t = \int_0^t H_s \, dB_s$ pour $0 \leq t \leq 3$. (Interprétation : on détient une action sur]0, 1], puis une action seulement si le prix a monté pendant la première période, puis B_2 actions.)

1. Justifier que H est un processus simple. Écrire I_3, puis I_t pour $1 < t \leq 2$. (0,5 pt)
2. Calculer $\mathbb{E}[I_3]$ et $\mathbb{E}[I_3^2]$ **directement**, sans invoquer les propriétés du cours, en justifiant soigneusement la valeur de chaque terme croisé. Vérifier ensuite l'isométrie d'Itô. (1,5 pt)
3. Calculer directement $\mathbb{E}[I_3 \mid \mathcal{F}_{3/2}]$ et $\mathbb{E}[I_3 \mid \mathcal{F}_{5/2}]$, et comparer avec $I_{3/2}$ et $I_{5/2}$. (1 pt)
4. Montrer que $\mathbb{P}(I_2 > 0) = 3/8$. (2 pts)
   Indication : le couple $(B_1,\ B_2 - B_1)$ a une loi invariante par rotation. En déduire que I_2 n'est pas une variable gaussienne, alors qu'elle est centrée de variance finie.

Exercice 2 — Une intégrale de Wiener et son renormalisé (5 points)

Pour $t \geq 0$, on pose

$$M_t = \int_0^t e^s \, dB_s, \qquad X_t = e^{-t} M_t.$$

1. Donner la loi de M_t, puis $\mathrm{Cov}(M_s, M_t)$ pour $0 \leq s \leq t$, et la variation quadratique $\langle M \rangle_t$. Est-elle aléatoire ? (1 pt)
2. Soit $0 \leq s < t$. (2 pts)
   a. Montrer que $M_t - M_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$.
      Indication : traiter d'abord le cas d'un intégrand en escalier sur $[s,t]$, puis passer à la limite en utilisant, pour $A \in \mathcal{F}_s$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la quantité $\mathbb{E}[e^{i\theta Y}\mathbf{1}_A]$.

b. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le processus $Z_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{4}(e^{2t}-1)\right)$ est une martingale.

3. Donner la loi de X_t, calculer $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ pour $0 \le s \le t$ et $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s]$. Le processus X est-il une martingale ? (1,5 pt)
4. Déterminer la loi limite de X_t quand $t \to \infty$, puis calculer $\mathbb{P}(X_1 > 1)$. (0,5 pt)

Exercice 3 — Calcul de $\int_0^t B_s^2\ dB_s$ à partir de la définition (6 points)

On fixe $t > 0$ et, pour $n \ge 1$, la subdivision uniforme $t_i = it/n$, de pas $h = t/n$. Le but est de démontrer, **sans formule d'Itô**, que

$$\int_0^t B_s^2\ dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s\ ds.$$

1. Vérifier que, pour tous réels x, y, $x^2(y-x) = \frac{1}{3}(y^3 - x^3) - x(y-x)^2 - \frac{1}{3}(y-x)^3$. En déduire

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}^2\ \Delta_i = \frac{1}{3}B_t^3 - \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\ \Delta_i^2 - \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_i^3\,.$$ (0,5 pt)

2. Montrer que $\mathbb{E}[(\sum_i \Delta_i^3)^2] = 15t^3/n^2$. (1 pt)
3. On pose $R_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\,(\Delta_i^2 - h)$. Montrer que $\mathbb{E}[R_n^2] = t^3(n-1)/n^2$. (1,5 pt)
4. Montrer que $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t B_s\ ds - \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\ h\right)^2\right] = \frac{t^3}{3n^2}$ puis conclure. (1 pt)
5. Vérifier sur la formule obtenue l'espérance nulle et l'isométrie d'Itô. En déduire que $B_t^3 - 3\int_0^t B_s\ ds$ est une martingale, puis que $tB_t - \int_0^t B_s\ ds$ en est une. (1,5 pt)

Exercice 4 — Vrai ou faux ? (4 points)

Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux et **justifier** : une preuve si c'est vrai, un contre-exemple explicite si c'est faux. H et K désignent des éléments de $\mathcal{H}_1^2$.

a. $\int_0^1 H_s\ dB_s$ est toujours une variable gaussienne. (1 pt)
b. Si $\mathbb{E}\int_0^1 H_s\,K_s\,ds = 0$, alors $\int_0^1 H_s\ dB_s$ et $\int_0^1 K_s\ dB_s$ sont indépendantes. (1 pt)
c. Si $\int_0^1 H_s\ dB_s = 0$ presque sûrement, alors $\mathbb{E}\int_0^1 H_s^2\ ds = 0$. (1 pt)
d. Si $H_s \ge 0$ pour tout s, alors $\mathbb{E}\left[B_1 \int_0^1 H_s\ dB_s\right] \ge 0$. (1 pt)