*L.M.D.,* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

**Exercice 1** : Soit le montage de la figure 1.

Les 2 circuits LC oscillants sont couplés par une capacité C. Ici C1 = C2 = C et L1 = L2 = L

1) Ecrire les 2 équations différentielles en i1 et i2 (puis en q1 et q2).

2) Trouver les pulsations propres du système et donner la solution générale sachant qu’à t = 0, seul C1 possède une charge q.

**Exercice 2** : Soit le montage de la figure 2

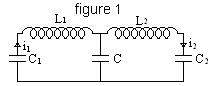
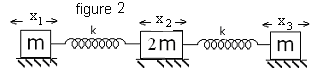
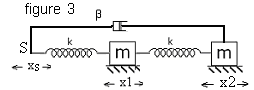
1) Ecrire les équations différentielles. 2) Trouver les pulsations propres. Donner la matrice de passage.

3) Ecrire les solutions générales.

**Exercice 3**: Soit le montage de la figure 3

1) Ecrire les équations différentielles. 2) Trouver les solutions du régime permanant sachant que xs(t) = a cosΩt 3) Si β = 0 pour qu’elles valeurs de Ω a-t-on résonance.

Donner alors dans ce cas la condition pour laquelle la 1ère masse reste immobile.

**Exercice 4** : Soit le montage de la figure 4.

Un pendule de masse m et de longueur L pivote avec un angle θ autour du centre de gravité G d’un cylindre (de masse M de rayon R et de moment d’inertie J = ½ MR2) qui roule sans glisser sur un plan horizontale (c'est-à-dire lorsque le cylindre tourne de φ son centre de gravité se déplace de x = R φ ).

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système oscillatoire en fonction de x et θ.

2) En utilisant la formule de Lagrange, trouver les équations différentielles du mouvement.

3) Dans le cas des petites oscillations, et en négligeant le terme composé en  , écrire le système d’équations différentielles linéaires du mouvement.

4) Les solutions de ce systèmes sont sinusoïdales, trouver les fréquences propres.

**Exercice 5** : Soit le montage de la figure 5. Les 2 cylindres identiques (masse M, rayon R, et moment d’inertie J = ½ MR2) roulent sans glisser sur un support horizontal. Soit θ1 et θ2 les angles de rotation de ces 2 cylindres par rapport à leurs positions d’équilibre respectives. Au repos (θ1 = θ2 = 0) les ressorts sont non déformés.

1) Etablir le Lagrangien du système en fonction de x1 et x2 .

2) On prend k1 = k2 = k’ ≠ k, trouver les équations du mouvement. 3) En déduire les pulsations propres.

4) Ecrire le lagrangien sous la forme suivante :

 En déduire les expressions de ω02 et de K

5) K est le coefficient de couplage, montrer qu’il varie entre 2 valeurs limites.

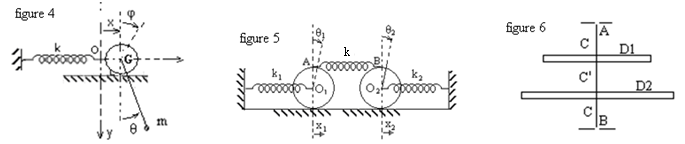
6) Donner le sens physiques de ω0 en le comparer aux pulsations propres trouvées dans la question 3.

En déduire l’effet du couplage k sur les pulsations propres.

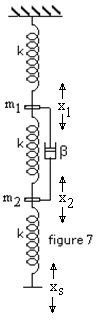
**Exercice 6** : Soit le montage de la figure 6. 2 disques mobiles D1 et D2 ayant des moments d’inertie J1 et J2 par rapport à l’axe de rotation AB sont suspendus par 3 fils de torsion, tendus entre les points A et B, ayant des constantes de torsions C, C’ et C. Ce système peut effectuer des rotations autour de l’axe AB. Soit θ1 et θ2 les angles que font les disques par rapport à leur position d’équilibre.

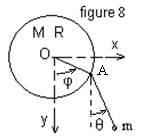
1) Calculer la pulsation ω0 des oscillations de D1 quand D2 est bloqué.

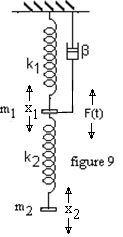
2) a) Les 2 disques étant libre d’osciller, calculer (avec J1=J2=J) les pulsations ω1 et ω2 des 2 modes de vibrations. b) A t = 0 les disques sont lâchés avec comme conditions initiales : θ1(t=0) = α et θ2 (t=0) = 0 et avec des vitesses nulles, trouver θ1(t) et θ2(t). 3) Déterminer l’énergie emmagasinée dans le système

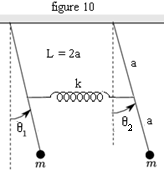


*L.M.D.,* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*









Exercice 7

Soit le système oscillatoire de la figure 7.

1) Etablir les équations différentielles des masses m1 et m2 , (x1 et x2 ) leurs amplitudes dynamique respectives).

2) Donner le schéma électrique équivalent du système en établissant d’abord les équations en charges q1 et q2 puis en courant i1 et i2.

3) On prend m1 = m2 = m. Trouver les expression des amplitudes complexes des solutions x1 et x2 du régime permanant sachant que F(t) = k.xs = a.exp(i Ω.t);

4) Si **β = 0** (pas d’amortissement) :

a) Pour quelle pulsation la masse m2 reste immobile ;

b) Quelles sont les pulsations de résonance ;

c) Considérons le cas non excité (F(t) = 0), trouver :

- Les pulsations propres (correspondantes aux modes)

- La matrice de passage.

- Les solutions générales.

Exercice 8

Soit le système mécanique de la figure 8. Le disque circulaire homogène de masse M et de rayon R est mobile sans frottements autour de son axe horizontal.

La masse m est reliée à un point A de la circonférence du disque par une tige sans masse de longueur L. L’articulation au point A permet à la tige d’osciller dans le plan du disque sans contraintes (sans frottements). Les angles θ et φ permettent de caractériser la position du système à chaque instant.

1) Etablir le Lagrangien du système.

2) Que devient l’expression de la fonction de Lagrange dans le cas des petites

oscillations autour de la position d’équilibre.

3) Ecrire les équations du mouvement.

Exercice 9

Une masse m1 suspendu à un ressort de raideur k1 est reliée à un amortisseur β.

On suspend un ressort k2 et une masse m2 à m1, figure 9.

Une force F(t) = Fo.cos(Ω.t) est appliquée à la masse m1.

Soient x1 et x2 les déplacements dynamique de m1 et m2 par rapport aux positions d’équilibres.

1) Etablir les équations différentielles donnant le mouvement des masses m1 et m2

2) Donner l’équivalent électrique du système

3) Calculer x1. Pour quelle fréquence Ω1, m1 reste-elle immobile ?

Exercice 10

Deux pendules identiques de longueur L = 2a portants à leurs extrémités deux masses ponctuelles (figure 10). Le ressort de constante k assure le couplage.

Les deux pendules sont repérés à chaque instant par leurs élongations angulaires θ1 et θ2.

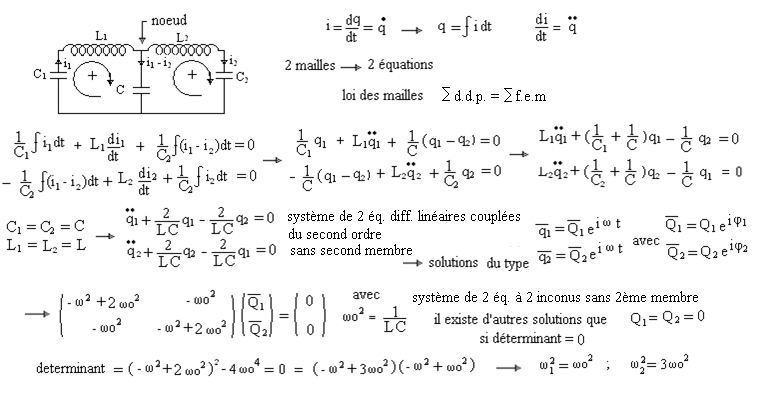
1) Déterminer l´énergie cinétique et potentielle du système et écrire le Lagrangien en fonction de θ1 et θ2.

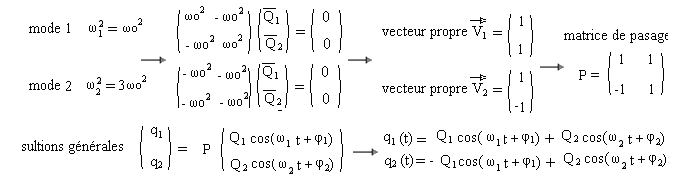
2) En déduire les deux équations différentielles du mouvement, dans le cas des petites oscillations.

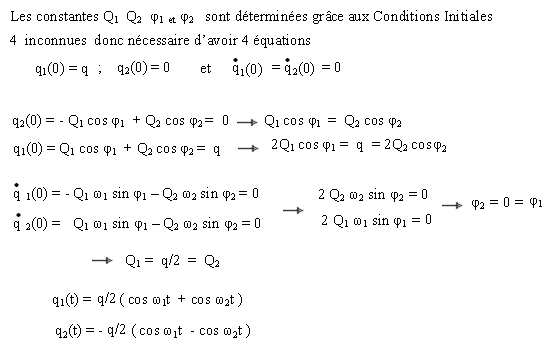
3) Calculer les deux pulsations propres du système.

*L.M.D., corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

Réponse 1

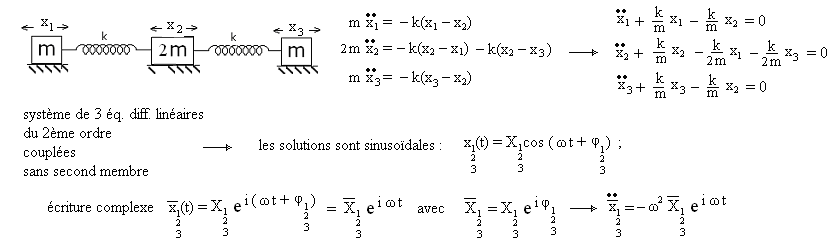
****

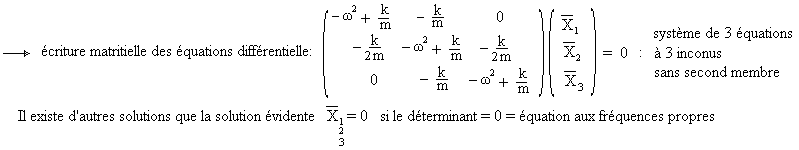
****

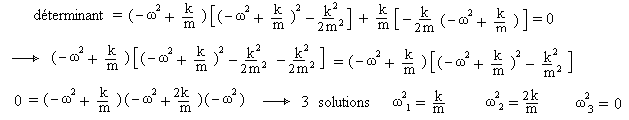


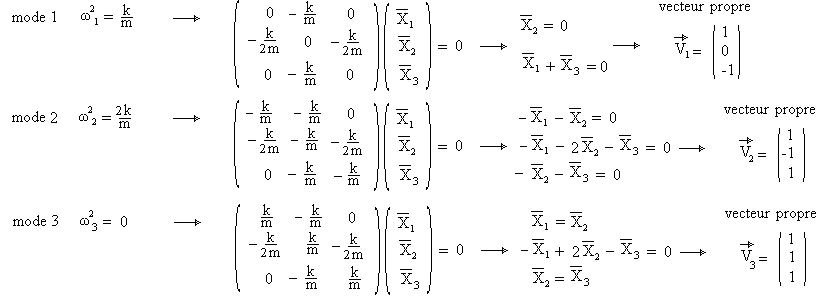
*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

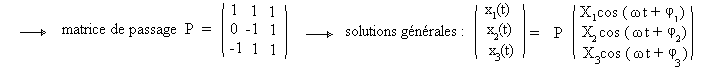
Réponse 2











x1 (t) = X1 cos (ω1 t + φ1 ) + X2 cos (ω2 t + φ2 ) + X3 cos (ω3 t + φ3 )

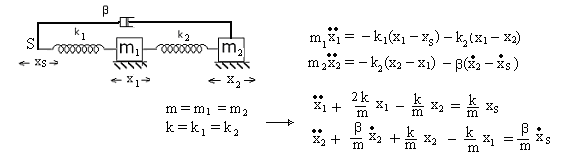
→ x2 (t) = 0 - X2 cos (ω2 t + φ2 ) + X3 cos (ω3 t + φ3 )

x3 (t) = - X1 cos (ω1 t + φ1 ) + X2 cos (ω2 t + φ2 ) + X3 cos (ω3 t + φ3 )

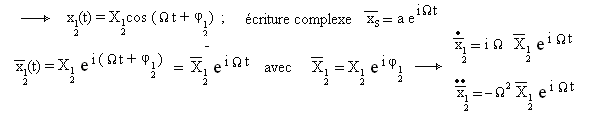
Remarque : Les constantes X et φ sont déterminés par les conditions initiales (C.I.)

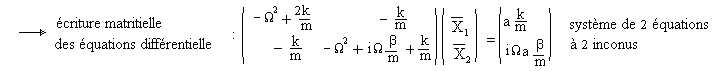
*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

Réponse 3

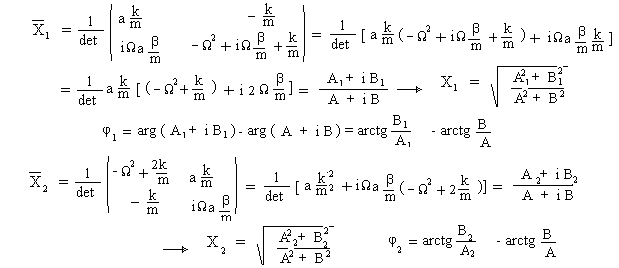


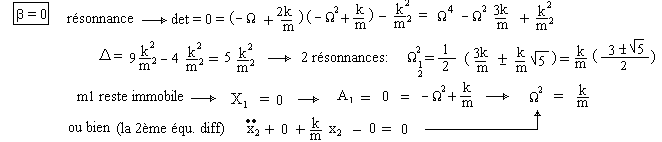
Les solutions du régime permanant sont du même type que l’excitation xs = a cos Ω t





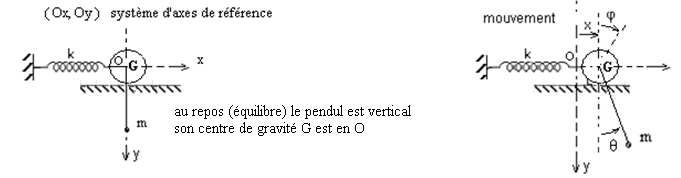


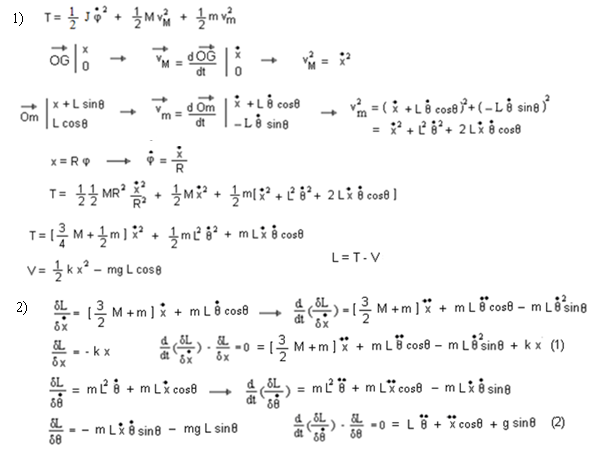


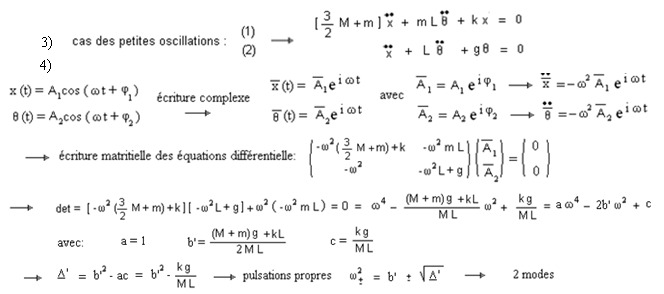


*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

Réponse 4

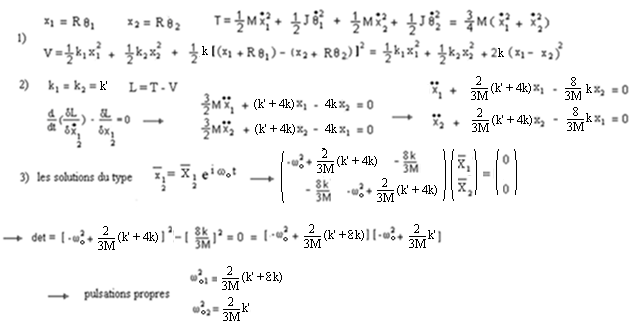


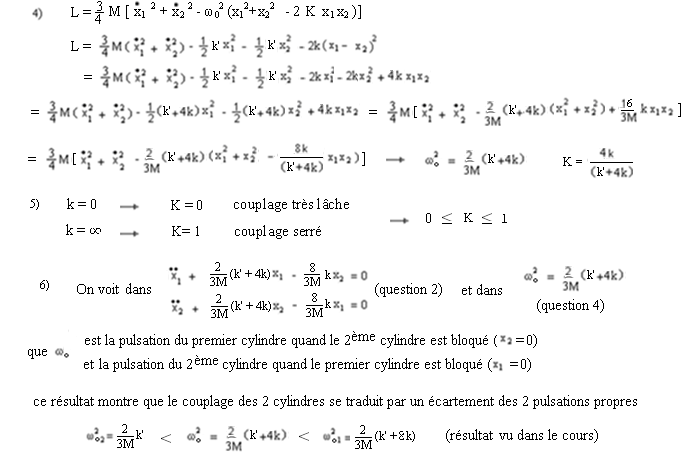




*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

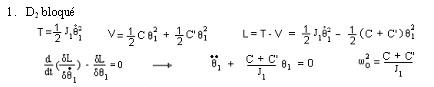
Réponse 5

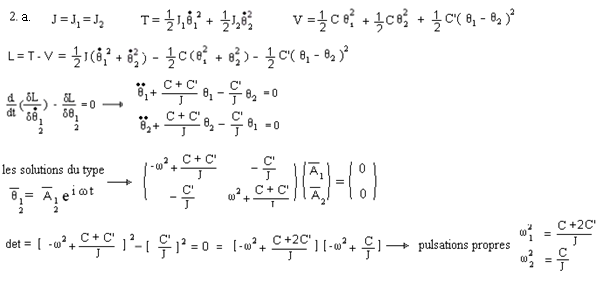


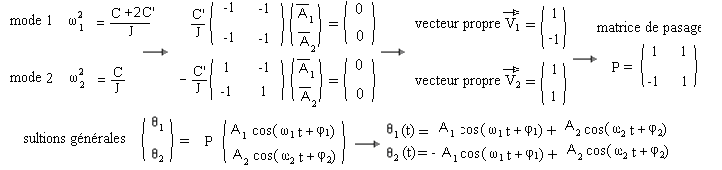


*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

Réponse 6







2.b. θ1(0) = α ; θ2(0) = 0  et θ’1(0) = θ’2(0) = 0

θ1(0) = A1 cos φ1 + A2 cos φ2 = α

θ2(0) = - A1 cos φ1 + A2 cos φ2 = 0 → A1 cos φ1 = A2 cos φ2  → 2A1 cos φ1 = α = 2A2 cos φ2

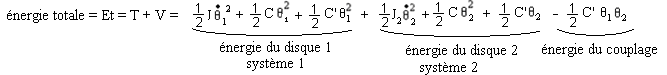
θ’1(0) = - A1 ω1 sin φ1 – A2 ω2 sin φ2 = 0

θ’2(0) = A1 ω1 sin φ1 – A2 ω2 sin φ2 = 0  → 2 A2 ω2 sin φ2 = 0 et 2 A1 ω1 sin φ1 = 0 → φ2 = 0 = φ1

→ A1 = α/2 = A2

θ1(t) = α/2 ( cos ω1t + cos ω2t )

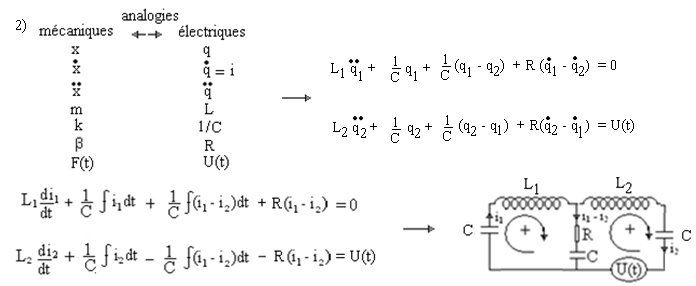
θ2(t) = - α/2 ( cos ω1t - cos ω2t )

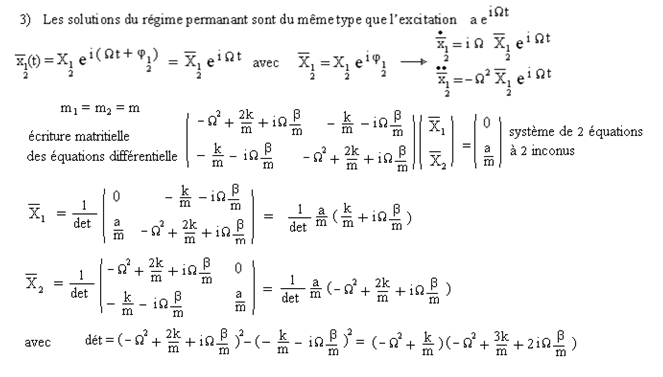


*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

Réponse 7

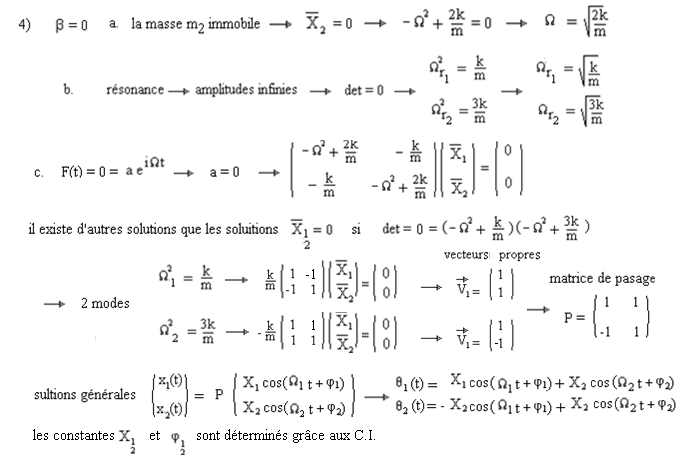






*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

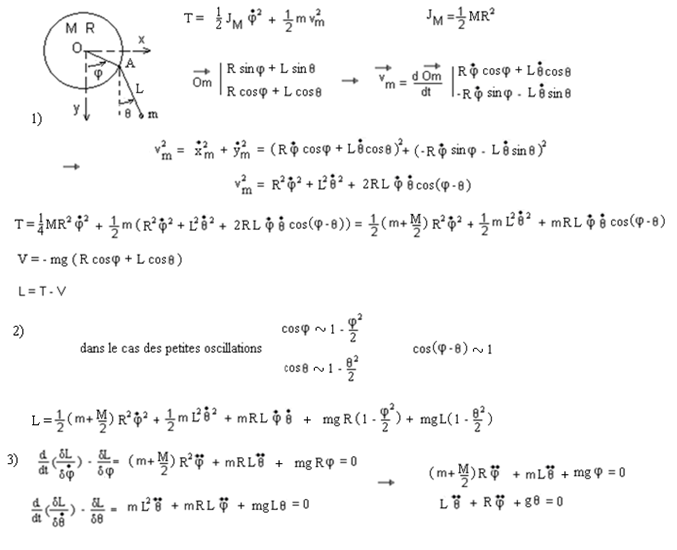
Suite Réponse 7



Remarque : lorsque l’excitation est arrêté, le système continu à osciller avec une des fréquence de résonance

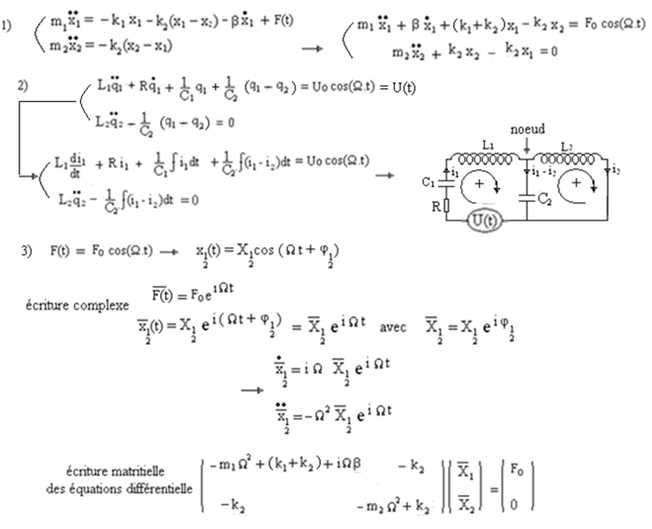
*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

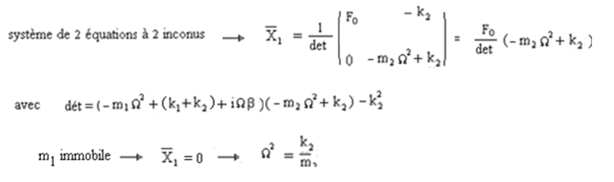
Réponse 8



*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

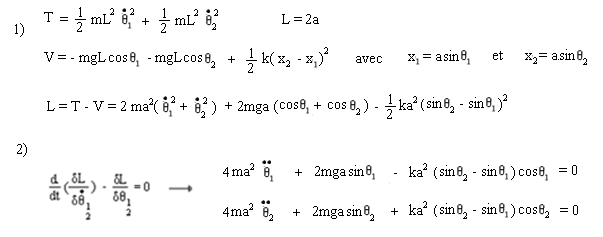
Réponse 9



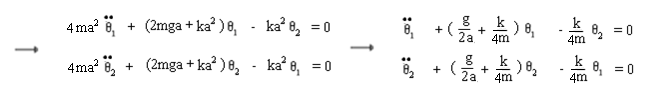


*L.M.D., suite corrigé des* ***Travaux Dirigés*** physique 3 *Oscillations à plusieurs degrés de liberté*

**Réponse 10**



Dans le cas des petites oscillations, θ1 et θ2 petits, on peut faire les approximations : sinθ ~ θ et cosθ ~ 1



On obtient un système de 2 équations différentielles du second ordre linéaires couplée sans second membre.

