UNIVERSITE D'ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEN
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES

TRAVAUX DIRIGES DE PHYSIQUE4
MECANIQUE RATIONNELLE

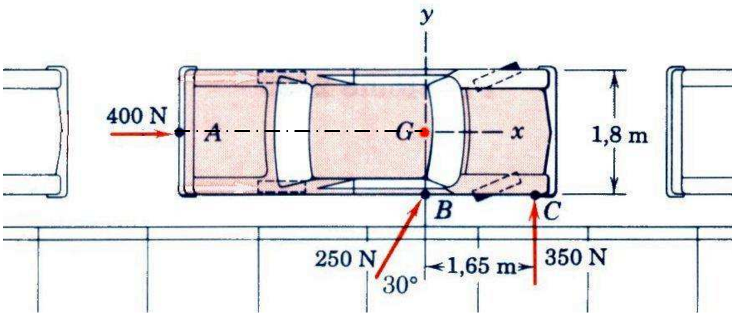
Khouane MEFTAH
Enseignant à la Faculté

TABLE DES MATIERES

TD N°1
STATIQUE PAR LES TORSEURS

EXERCICE 1

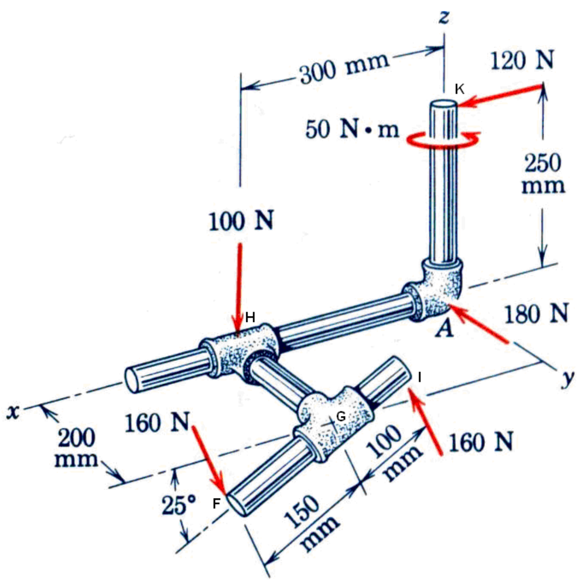
Pour dégager une voiture en panne prise entre 2 automobiles stationnées, 3 personnes exercent des actions aux points A, B et C.



1- Déterminer le torseur résultant de ces actions au point G.
2- Vérifier que ce torseur est un glisseur et déterminer son axe.

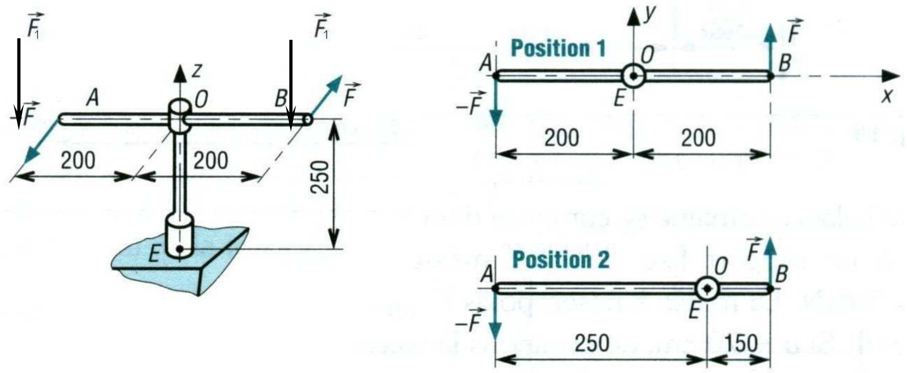
EXERCICE 2

Déterminer les caractéristiques en A du torseur des efforts appliqués sur cet ensemble.



EXERCICE 3

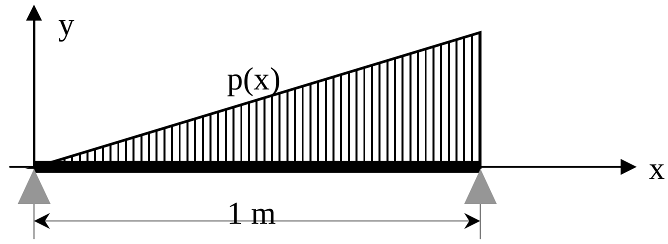
Une clé à bougie se compose d'un corps et d'une tige de manœuvre coulissante. En utilisation, l'opérateur exerce les efforts $\vec{F}$ et $\vec{F_1}$ (F = 100 N et F_1 = 10 N) en A et B.
- Déterminer les caractéristiques en E et O du torseur de ces efforts, dans les 2 positions.



EXERCICE 4

Une poutre sur 2 appuis est soumise à une charge répartie variant linéairement $\vec{p}(x) = -a\ \ x\ \ \vec{y}$ *avec a = 100 N/m².*

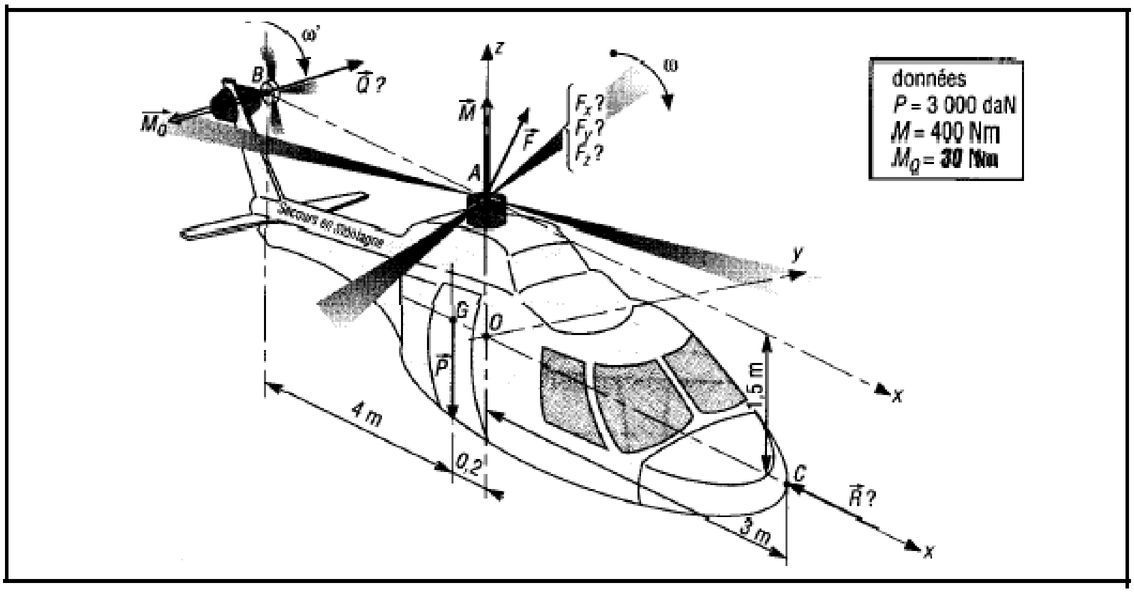
Déterminer les éléments de réduction les plus simples du torseur associé à la charge $\vec{p}(x)$.



Exercice 5

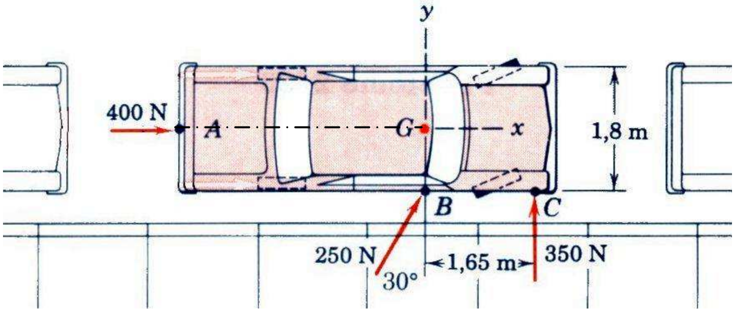
L'hélicoptère proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe (0, x) ; l'axe (0, z) est vertical. $\vec{F}$ et $\vec{M}$ schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal. $\vec{M_Q}$ et $\vec{Q}$ sont les actions sur le rotor anti-couple, $\vec{R}$ est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil et $\vec{P}$ le poids total.

Écrire les torseurs correspondant aux actions précédente;. Isoler l'hélicoptère ; appliquer le principe fondamental de la statique ; en déduire $\vec{R}$, $\vec{Q}$ et $\vec{F}$.



SOLUTION DU TD N°1

<u>EXERCICE 1</u>



La voiture est soumise à 3 torseurs :

a) action en A : $\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}A \\ \vec{M}A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$

car $\vec{M}_G = \vec{M}_A + \vec{GA} \wedge \vec{F}_A = 0$ car $\vec{F}_A // \vec{M}_A$.

b) action en B : $\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}B \\ \vec{M}B \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 250\sin 30 & 0 \\ 250\cos 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 125 & 0 \\ 216.51 & 0 \\ 0 & 112.5 \end{Bmatrix}_G$

car $\vec{M}_G = \vec{M}_B + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 125 \\ 216.51 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9*125 = 112.5 \end{pmatrix}$

c) action en C : $\{T\}_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}C \\ \vec{M}C \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 577.5 \end{Bmatrix}_G$

car $\vec{M}_G = \vec{M}_C + \vec{GC} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.65 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.65*350 = 577.5 \end{pmatrix}$

Le torseur résultant en G est égal à :

$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 125 & 0 \\ 216.51 & 0 \\ 0 & 112.5 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 577.5 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 525 & 0 \\ 566.51 & 0 \\ 0 & 690 \end{Bmatrix}_G$$

La force résultante est égale à : $\vec{R} = 525\vec{i} + 566.51\vec{j}$

Le moment résultant est égal à $\vec{M}_G = 690\vec{k}$

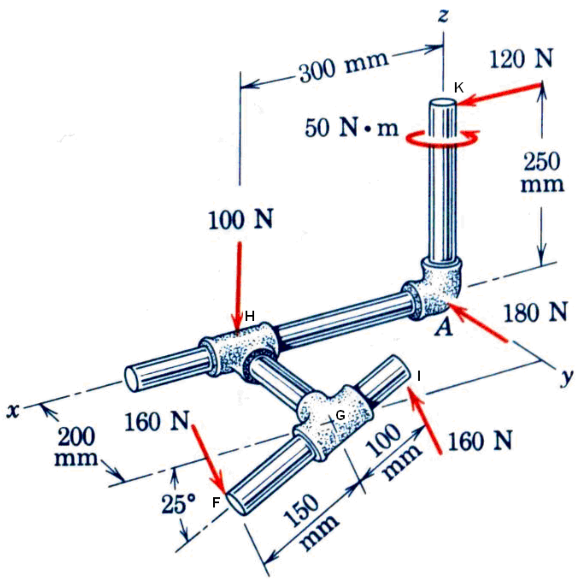
Le torseur est un glisseur si en un point D(x,y), le moment résultant $\vec{M}_D$ *s'annule :*

$$\vec{M}_D = \vec{M}_G + \vec{DG} \wedge \vec{F}_G = \vec{M}_G - \vec{GD} \wedge \vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 525 \\ 566.51 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 - (566.51x - 525y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $690 - (566.51x - 525y)$ *=0 ou 566.51 x -525 y – 690 =0*

La droite d'équation 566.51 x -525 y – 690 =0 est l'axe du glisseur. Pour tous les points appartenant à cette droite, le torseur se réduit à un glisseur

EXERCICE 2



L'ensemble est soumis à l'action de 5 torseurs appliqués en A, K, H, I et F

Tout d'abord, il faut convertir les distances en m

a) action en A

$$\{T\}_1 = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\,A\\ \vec{M}\,A\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ -180 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_A$$

b) action en K :

$$\{T\}_2 = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\,K\\ \vec{M}\,K\end{matrix}\right\}_K = \left\{\begin{matrix}120 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 50\end{matrix}\right\}_K = \left\{\begin{matrix}120 & 0\\ 0 & 30\\ 0 & 50\end{matrix}\right\}_A$$

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_K\right) = \vec{M}_K + \vec{AK} \wedge \vec{F}_K = \begin{pmatrix}0\\0\\50\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0.25\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}120\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\30\\50\end{pmatrix}$$

c) action en H : $\{T\}_3 = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\,H\\ \vec{M}\,H\end{matrix}\right\}_H = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -100 & 0\end{matrix}\right\}_H = \left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 30\\ -100 & 0\end{matrix}\right\}_A$

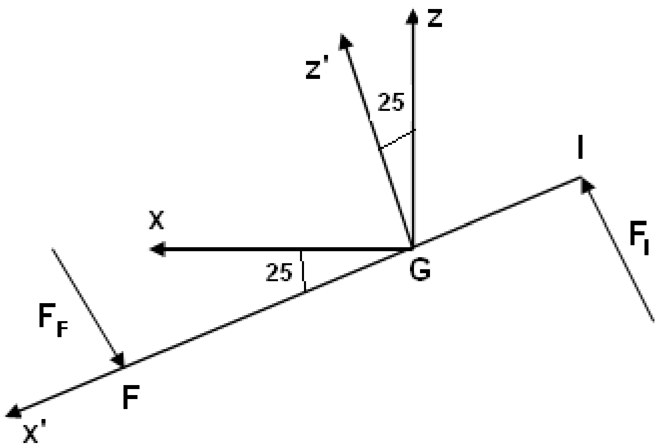
$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_H\right) = \vec{M}_H + \vec{AH} \wedge \vec{F}_H = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-100\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\30\\0\end{pmatrix}$$

d) action en I : $\{T\}_4 = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\,I\\ \vec{M}\,I\end{matrix}\right\}_I = \left\{\begin{matrix}160\sin 25 & 0\\ 0 & 0\\ 160\cos 25 & 0\end{matrix}\right\}_I = \left\{\begin{matrix}67.62 & 29\\ 0 & -27.5\\ 145.01 & -13.52\end{matrix}\right\}_A$

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_I\right) = \vec{M}_I + \vec{AI} \wedge \vec{F}_I = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.3 - 0.1\cos 25\\0.2\\0.1\sin 25\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}160\sin 25\\0\\160\cos 25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29\\-27.50\\-13.52\end{pmatrix}$$

2) action en F : $\{T\}_5 = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\,F\\ \vec{M}\,F\end{matrix}\right\}_F = \left\{\begin{matrix}-160\sin 25 & 0\\ 0 & 0\\ -160\cos 25 & 0\end{matrix}\right\}_F = \left\{\begin{matrix}-67.62 & -29\\ 0 & 67.5\\ -145.01 & 13.52\end{matrix}\right\}_A$

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}_F\right) = \vec{M}_F + \vec{AF} \wedge \vec{F}_F = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.3 + 0.15\cos 25\\0.2\\-0.15\sin 25\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-160\sin 25\\0\\-160\cos 25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-29\\67.50\\13.52\end{pmatrix}$$



$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 + \{T\}_4 + \{T\}_5$$

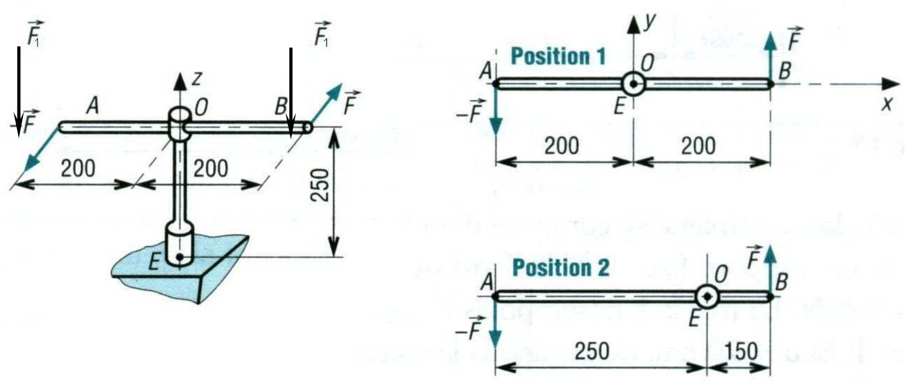
$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 67.62 & 29 \\ 0 & -27.5 \\ 145.01 & -13.52 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -67.62 & -29 \\ 0 & 67.5 \\ -145.01 & 13.52 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ -180 & 100 \\ -100 & 50 \end{Bmatrix}$$

Méthode directe : les forces $\vec{F}_I$ et $\vec{F}_H$ sont égales et opposées, leur action est un couple autour de l'axe y, le module de ce couple est : C=F d =160 (0.15+0.1)=40 N.m

Donc : les forces $\vec{F}_I$ et $\vec{F}_H$ peuvent être remplacées par un torseur couple : $\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 + \{C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ -180 & 100 \\ -100 & 50 \end{Bmatrix}$$

EXERCICE 3



La force résultante en O est égale à : $\vec{F}_o = 2\,\vec{F}_1 = -20\,\vec{k}$ (N)

Le moment résultant est égal à : $\vec{M}_o = \vec{OB} \wedge \vec{F} + \vec{OA} \wedge \left(-\vec{F}\right) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_1$

$$\vec{M}_o = \left(\vec{OB} - \vec{OA}\right) \wedge \vec{F} + \left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) \wedge \vec{F}_1 = \left(\vec{AB}\right) \wedge \vec{F} + \left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) \wedge \vec{F}_1$$

$$\left(\vec{AB}\right) \wedge \vec{F} = (AB\,F)\,\vec{i} \wedge \vec{j} = 0.4\ 100\,\vec{k} = 40\,\vec{k}$$

1- *Position 1 :* $\vec{OA}+\vec{OB}=0$ *d'où* $\vec{M}_o = 40\,\vec{k}\ (N.m)$ $\{T\}_o = \begin{Bmatrix} \vec{F}_o \\ \vec{M}_o \end{Bmatrix}_o = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -20 & 40 \end{Bmatrix}_o$

2- *Position 2 :* $\vec{OA}+\vec{OB} = -0.25\vec{i} + 0.15\vec{i} = -0.10\vec{i}$

$\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)\wedge \vec{F}_1 = -0.10\vec{i} \wedge \left(-10\vec{k}\right) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

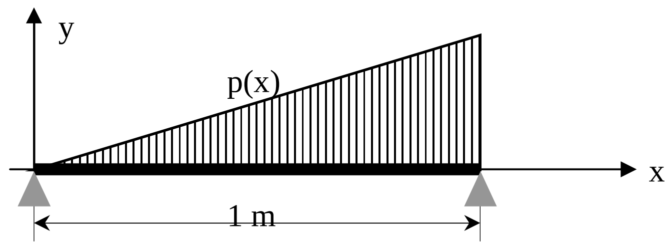
$\vec{M}_o = -\vec{j} + 40\,\vec{k}\ (N.m)$ *D'où* $\{T\}_o = \begin{Bmatrix} \vec{F}_o \\ \vec{M}_o \end{Bmatrix}_o = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -20 & 40 \end{Bmatrix}_o$

En E la force résultante ne change pas $\vec{F}_E = \vec{F}_o$

Le moment en E est égal à : $\vec{M}_E = \vec{M}_o + \vec{EO}\wedge\vec{F}_o = \vec{M}_o$ *car* $\vec{EO}\ //\ \vec{F}_o$

D'où $\{T\}_E = \{T\}_o$

Exercice 4



Calculons le torseur résultant en un point G(b,0,0) :

La force résultante est égale à : $\vec{F}_G = \int_0^1 \vec{p}(x)dx = \int_0^1 -ax\vec{y}dx = -\frac{a}{2}\vec{y}$

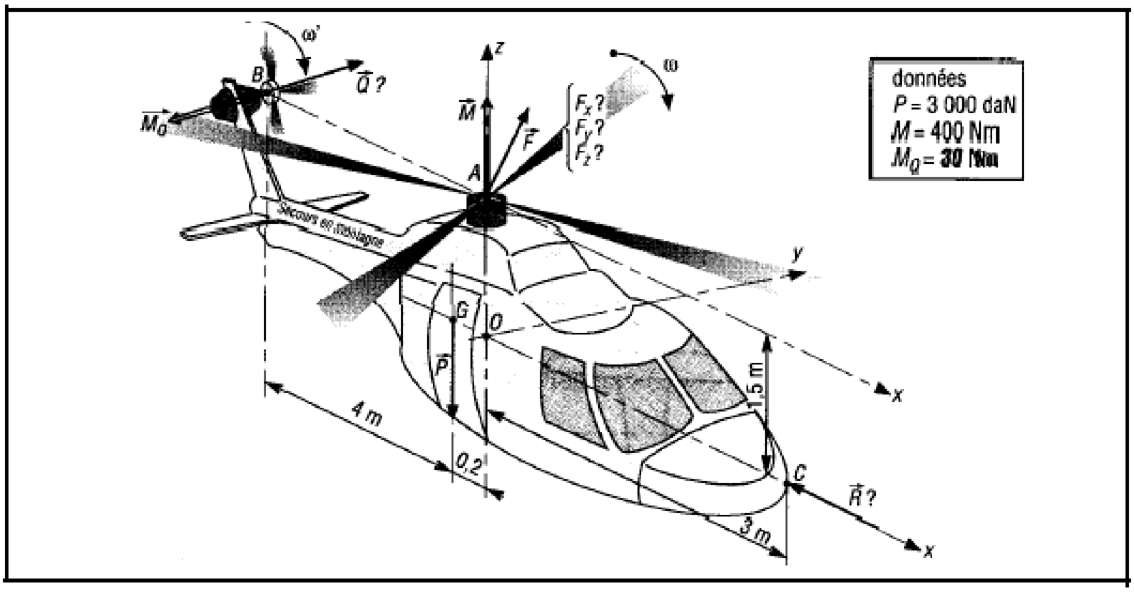
Le moment résultant en G est égal à :

$$\vec{M}_G = \left(\int_0^b ax(b-x)dx - \int_b^1 ax(x-b)dx\right)\vec{k} = \int_0^1 ax(b-x)dx\,\vec{k} = \frac{a}{2}\left(b-\frac{2}{3}\right)\vec{k}$$

Si on choisit $b=\frac{2}{3}$ *alors* $\vec{M}_G = 0$

Et le torseur se réduit à : $\{T\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -50 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ *avec* $G\left(\frac{2}{3},0,0\right)$

Exercice 5



Résolution : isolons l'ensemble de l'hélicoptère et appliquons le principe fondamental. L'hélicoptère est soumis à l'action de quatre torseurs d'actions extérieures :

a) action du poids :

$$\{\mathcal{T}_P\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2P \\ -P & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_A(\vec{P})} = \overrightarrow{M_G(\vec{P})} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}2P \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) résistance de l'air :

$$\{\mathcal{T}_R\} = {}_C\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_C\begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 1{,}5R \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_A(\vec{R})} = \overrightarrow{M_C(\vec{R})} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}5R \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) action du rotor de queue :

$$\{\mathcal{T}_B\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{M_Q} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4{,}2Q \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_A(\vec{Q})} = \overrightarrow{M_B(\vec{Q})} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_Q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_Q \\ -4{,}2Q \end{bmatrix}$$

d) action du rotor principal :

$$\{\mathcal{T}_A\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{Bmatrix}$$

Écrivons le principe fondamental au point A :

$$_A\{\mathcal{T}_A\} + _A\{\mathcal{T}_B\} + _A\{\mathcal{T}_R\} + _A\{\mathcal{T}_P\} = \{0\}$$

$$_A\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{Bmatrix} + _A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4{,}2Q \end{Bmatrix} + _A\begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 1{,}5R \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + _A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0{,}2P \\ -P & 0 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

On obtient les équations :

$F_x - R = 0$ (1) $\qquad 0 = 0$ (4)

$F_y + Q = 0$ (2) $\qquad -M_Q + 1{,}5R - 0{,}2P = 0$ (5)

$F_z - P = 0$ (3) $\qquad M - 4{,}2Q = 0$ (6)

(3) donne $F_z = P = 3\,000\,\text{daN}$; (6) donne $Q = \dfrac{M}{4{,}2} = \dfrac{40}{4{,}2} = 9{,}5\,\text{daN}$;

(5) donne $R = \dfrac{M_Q + 0{,}2P}{1{,}5} = 402\,\text{daN}$; (1) donne $F_x = R = 402\,\text{daN}$;

(2) donne $F_y = -Q = -9{,}5\,\text{daN}$.

TD N°2
CINEMATIQUE

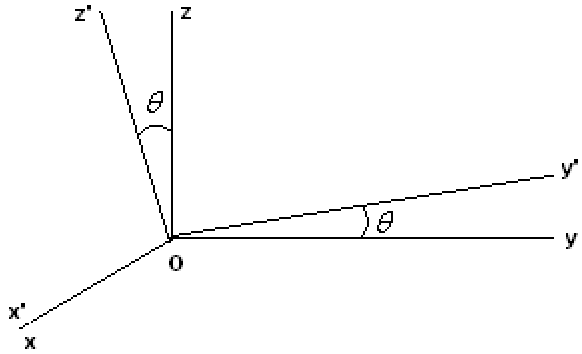
<u>Exercice1</u>

Un repère mobile R'(Ox'y'z') tourne autour de l'axe Ox. $\vec{\omega}_{R'/R_0} = \dot{\theta}\vec{i}$

Soit un vecteur $\vec{u}(x', y', z')$ *projeté dans le repère R'.*

a- Calculer $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0}$ *en exprimant* $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ *en fonction de* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

b- Calculer $\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0}$ *à l'aide de la dérivée d'un vecteur.*

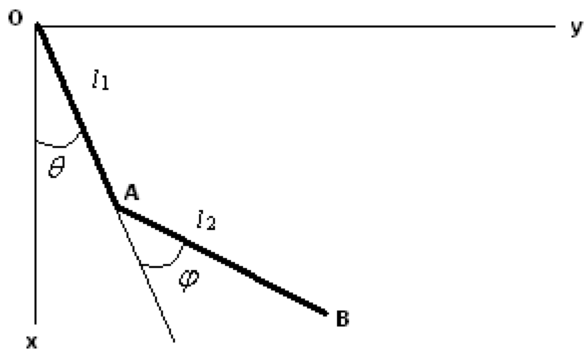


<u>Exercice2</u>

Un bipendule est constitué de deux barres OA et OB de longueur l_1 *et* l_2*.*

Calculer les composantes des vitesses $\vec{v}_A$ *et* $\vec{v}_B$ *dans les deux repères R' et* R_1*.*

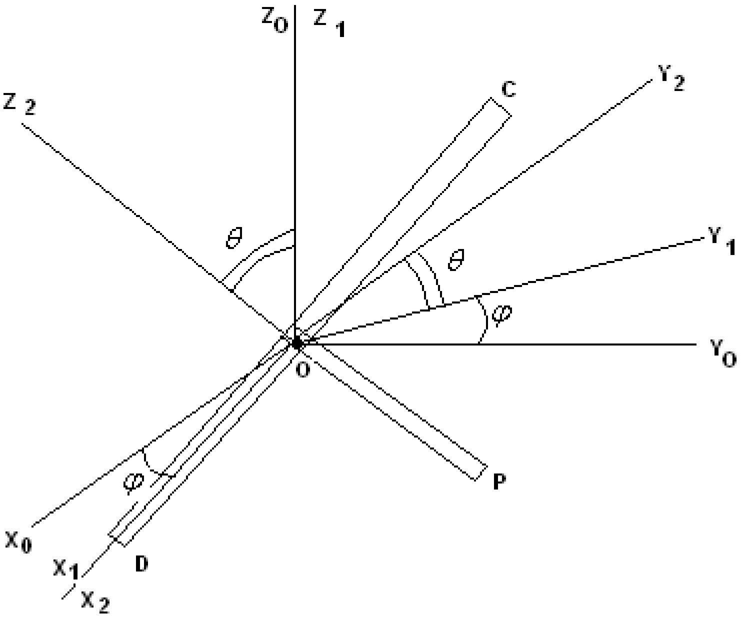
O est fixe, le système oscille dans le plan oxy, le repère R' est lié à la barre AB, le repère R_1 *est lié à la barre OA.*



<u>Exercice 3</u>

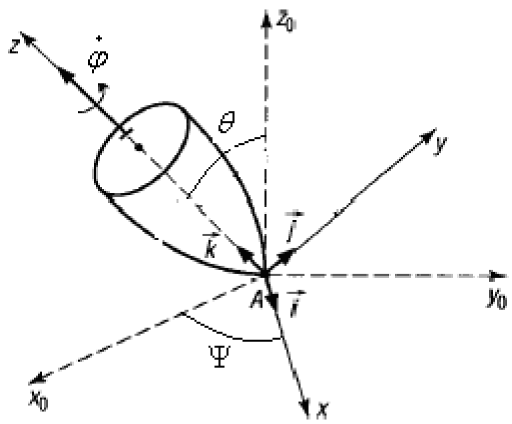
Un axe horizontal CD tourne autour d'un axe vertical OZ_0 *ou* OZ_1 *à la vitesse angulaire* $\dot{\varphi}$*. La barre OP de longueur l est soudée en O à CD et lui est* $\perp$*. Elle peut tourner autour de CD d'un angle* θ*. Sachant que* $R_1(O\, X_0\, Y_0\, Z_0)$ *est un repère fixe, le repère* $R_1(O\, X_1\, Y_1\, Z_1)$ *est un repère intermédiaire dont* OX_1 *est suivant CD,* OZ_2 *est suivant OP.*

Déterminer l'accélération du point P $\vec{\gamma}_P = f(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \ddot{\varphi}, \ddot{\theta})$ *par la dérivée du vecteur* $\vec{OP}$*. Le choix des axes de projection est important.*



Exercice4

Une toupie tourne autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ *, cet axe fait l'angle* θ *constant avec la verticale et tourne autour de celle-ci à la vitesse* $\dot{\Psi}$ *.*
Déterminer le module de la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{toupie/sol}$ *et l'angle que fait celle-ci avec la verticale.*



SOLUTION TD N°2

Exercice1

Ro =Oxyz repère fixe, R'=O'x'y'z' repère mobile $\vec{\omega}_{R'/Ro} = \dot{\theta}\vec{i} = \dot{\theta}\vec{i}\,'$, $\vec{u} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$

a- *Calcul de* $\left.\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right|_{Ro}$ *en exprimant* $\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'$ *en fonction de* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

On a $\vec{i}\,' = \vec{i}$, $\quad \vec{j}\,' = \vec{j}\cos\theta + \vec{k}\sin\theta$, $\quad \vec{k}\,' = -\vec{j}\sin\theta + \vec{k}\cos\theta$

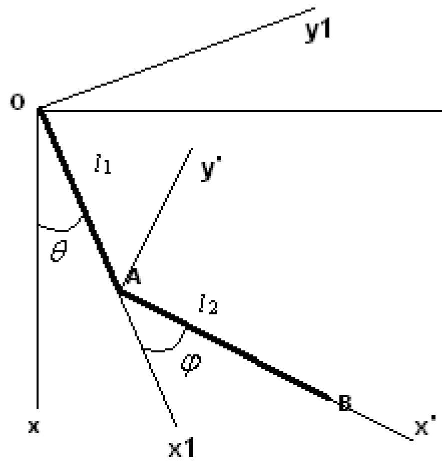
$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = \dot{\theta}\left(-\vec{j}\sin\theta + \vec{k}\cos\theta\right) = \dot{\theta}\vec{k}\,' \qquad \frac{d\vec{k}\,'}{dt} = -\dot{\theta}\left(\vec{j}\cos\theta + \vec{k}\sin\theta\right) = -\dot{\theta}\vec{j}\,'$$

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{Ro} = \dot{x}'\vec{i}\,' + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \dot{y}'\vec{j}\,' + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \dot{z}'\vec{k}\,' + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt} = \dot{x}'\vec{i}\,' + (\dot{y}' - \dot{\theta}z')\vec{j}\,' + (\dot{z}' + \dot{\theta}y')\vec{k}\,'$$

b- *En utilisant la dérivée d'un vecteur*

$$\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{Ro} = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}_{R'/Ro} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix}\dot{x}'\\ \dot{y}'\\ \dot{z}'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'-z'\dot{\theta}\\ z'+y'\dot{\theta}\end{pmatrix} = \dot{x}'\vec{i}\,' + (\dot{y}' - \dot{\theta}z')\vec{j}\,' + (\dot{z}' + \dot{\theta}y')\vec{k}\,'$$

Exercice2



Ro =Oxyz repère fixe, R1 =Ox1y1z1 repère mobile $\vec{\omega}_{1/o} = \dot{\theta}\vec{k}$

R' =Ax'y'z' repère mobile $\vec{\omega}_{2/1} = \dot{\varphi}\vec{k} \qquad \vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{k} \qquad \left(\vec{k} = \vec{k}\,' = \vec{k}_1\right)$

a- *Calcul de la vitesse* $\vec{v}_A$ *du point A.*

$$\vec{v}_A = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{Ro} \qquad \vec{OA} = \begin{pmatrix}l_1\cos\theta\\ l_1\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}_{Ro} = \begin{pmatrix}l_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}_{R1} = \begin{pmatrix}l_1\cos\varphi\\ -l_1\sin\phi\\ 0\end{pmatrix}_{R'} \qquad \vec{\omega}_{2/0} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{pmatrix}$$

$$\text{Repère } Ro : \ \vec{v}_A = \begin{pmatrix}-l_1\dot{\theta}\sin\theta\\ l_1\dot{\theta}\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}_{Ro}$$

$$Repère\ R1 :\ \vec{v}_A = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{Ro} = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R1} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{OA} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}l_1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\l_1\dot{\theta}\\0\end{pmatrix}_{R1}$$

Repère R' : $$\vec{v}_A = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{Ro} = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix}-l_1\dot{\varphi}\sin\varphi\\-l_1\dot{\varphi}\cos\varphi\\0\end{pmatrix}_{R'} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{pmatrix}_{R'} \wedge \begin{pmatrix}l_1\cos\varphi\\-l_1\sin\phi\\0\end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix}l_1\dot{\theta}\sin\varphi\\l_1\dot{\theta}\cos\varphi\\0\end{pmatrix}_{R'}$$

b- *Vitesse $\vec{v}_B$ du point B dans chacun des repères.*

$$\vec{v}_B = \left.\frac{d\vec{OB}}{dt}\right|_{Ro} = \left.\frac{d\left(\vec{OA}+\vec{AB}\right)}{dt}\right|_{Ro} = \left.\frac{d\left(\vec{OA}\right)}{dt}\right|_{Ro} + \left.\frac{d\left(\vec{AB}\right)}{dt}\right|_{Ro} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}l_2\cos(\theta+\phi)\\l_2\sin(\theta+\varphi)\\0\end{pmatrix}_{Ro} = \begin{pmatrix}l_2\cos\varphi\\l_2\sin\phi\\0\end{pmatrix}_{R1} = \begin{pmatrix}l_2\\0\\0\end{pmatrix}_{R'}$$

Repère Ro :

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix}-l_1\dot{\theta}\sin\theta\\l_1\dot{\theta}\cos\theta\\0\end{pmatrix}_{Ro} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}l_2\cos(\theta+\phi)\\l_2\sin(\theta+\varphi)\\0\end{pmatrix}_{Ro} = \begin{pmatrix}-l_1\dot{\theta}\sin\theta - l_2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi)\\l_1\dot{\theta}\cos\theta + l_2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi)\\0\end{pmatrix}_{Ro}$$

Repère R1 :

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix}0\\l_1\dot{\theta}\\0\end{pmatrix}_{R1} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}l_2\cos(\phi)\\l_2\sin(\varphi)\\0\end{pmatrix}_{R1} = \begin{pmatrix}-l_2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin\varphi\\l_1\dot{\theta}+l_2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos\varphi\\0\end{pmatrix}_{R1}$$

Repère R' :

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix}l_1\dot{\theta}\sin\varphi\\l_1\dot{\theta}\cos\varphi\\0\end{pmatrix}_{R'} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}l_2\\0\\0\end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix}l_1\dot{\theta}\sin\varphi\\l_1\dot{\theta}\cos\varphi + l_2(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\\0\end{pmatrix}_{R'}$$

Exercice 3

$Ro(O\,x_0y_0z_0)$ *repère fixe*

$R1(O\,x_1y_1z_1)$ *repère mobile* $\vec{\omega}_{1/0} = \dot{\varphi}\,\vec{k}_1$

$R2(O\,x_2y_2z_2)$ *repère mobile* $\vec{\omega}_{2/0} = \dot{\varphi}\,\vec{k}_1 + \dot{\theta}\,\vec{i}_2$

Dans le repère R$_2$ $\vec{OP} = \begin{pmatrix}0\\0\\-l\end{pmatrix}_{R2}$ $\vec{k}_1 = \vec{k}_1\cos\theta + \vec{j}_2\sin\theta \Rightarrow$ $\vec{\varpi}_{2/0} = \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\sin\theta\\ \dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix}_{R2}$

$$\vec{v}_p = \left.\frac{d\vec{OP}}{dt}\right|_{R0} = \left.\frac{d\vec{OP}}{dt}\right|_{R2} + \vec{\varpi}_{2/0}\wedge\vec{OP} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\sin\theta\\ \dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-l\dot{\varphi}\sin\theta\\ l\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}_{\mathbf{R2}}$$

$$\vec{\gamma}_p = \left.\frac{d\vec{v}_p}{dt}\right|_{R0} = \left.\frac{d\vec{v}_p}{dt}\right|_{R2} + \vec{\varpi}_{2/0}\wedge\vec{v}_p = \begin{pmatrix}-l\ddot{\varphi}\sin\theta - l\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\\ l\ddot{\theta}\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\varphi}\sin\theta\\ \dot{\varphi}\cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-l\dot{\varphi}\sin\theta\\ l\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{\gamma}_p = \left.\frac{d\vec{v}_p}{dt}\right|_{R0} = \begin{pmatrix}-l\ddot{\varphi}\sin\theta - 2l\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\\ l\ddot{\theta} - l\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\\ l\dot{\theta}^2 + l\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\end{pmatrix}_{\mathbf{R2}}$$

Exercice 4

La toupie tourne autour de son axe oz$_1$ ($\vec{\varpi}_1 = \dot{\varphi}\vec{k}_1$) , qui tourne autour de oz $\vec{\varpi}_2 = \dot{\Psi}\vec{k}$

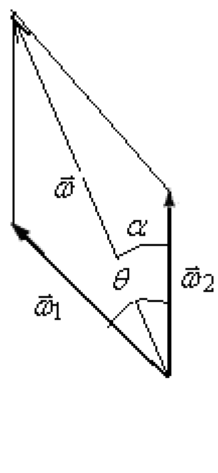
La toupie tourne avec une vitesse angulaire totale $\vec{\varpi} = \vec{\varpi}_1 + \vec{\varpi}_2 = \dot{\varphi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k}$

$\theta = (\vec{k},\vec{k}_1) \Rightarrow \vec{k}.\vec{k}_1 = \|\vec{k}_1\|\|\vec{k}\|\cos\theta = \cos\theta$

1- Module de $\vec{\varpi}$ **:** $\|\vec{\varpi}\| = \sqrt{\vec{\varpi}.\vec{\varpi}} = \sqrt{(\dot{\varphi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k})(\dot{\varphi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k})} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\Psi}\cos\theta}$

2- Soit α *l'angle que fait* $\vec{\varpi}$ *avec la verticale.*

$$\vec{\varpi}\,\vec{k} = \|\vec{\varpi}\|\|\vec{k}\|\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{\varpi}\,\vec{k}}{\|\vec{\varpi}\|} = \frac{(\dot{\varphi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k})\vec{k}}{\|\vec{\varpi}\|} = \frac{\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\Psi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\Psi}\cos\theta}}$$



_TD N°3_
CINETIQUE
CALCUL DU CENTRE DE GRAVITE

Exercice 1

- Montrer que le centre de gravité d'un parallélogramme est le point d'intersection des diagonales.
- Montrer que le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes.

Exercice2

Calculer la position du centre de gravité de d'une tige curviligne homogène(figure 1). On donne A(4,3), B(6,3), D(10,3). Le rayon de la forme circulaire est de 2.

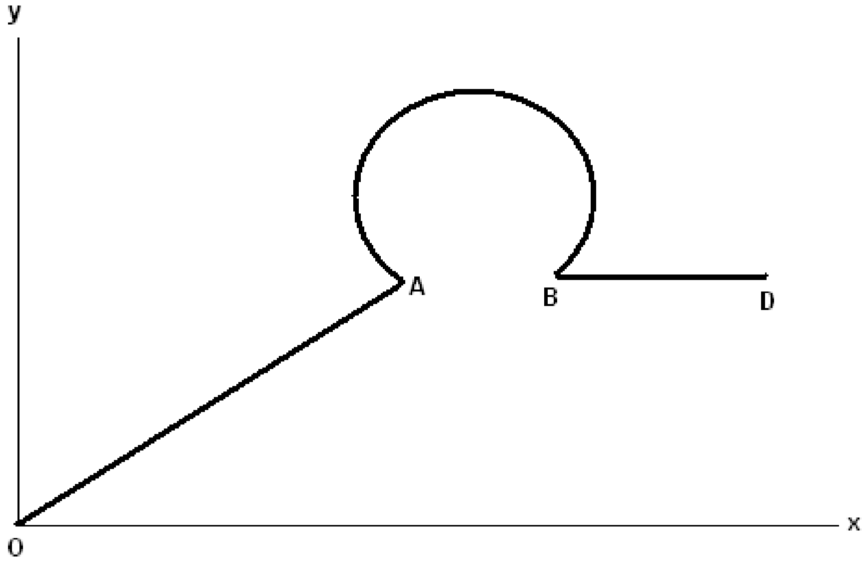


Figure 1

Exercice 3

Calculer par rapport à un repère que vous choisissez les coordonnées du centre de gravité d'une surface homogène (figure 2). AB=ED=12, BC=8, CD=6. (AE)//(BD), (AB)//(ED), $(BC) \perp (CD)$. *La forme arrondie est un demi-cercle.*
On donne les angles : $\alpha = \left(\vec{AB}, \vec{AE}\right) = 60°$, $\beta = \left(\vec{AB}, \vec{BC}\right) = 30°$.

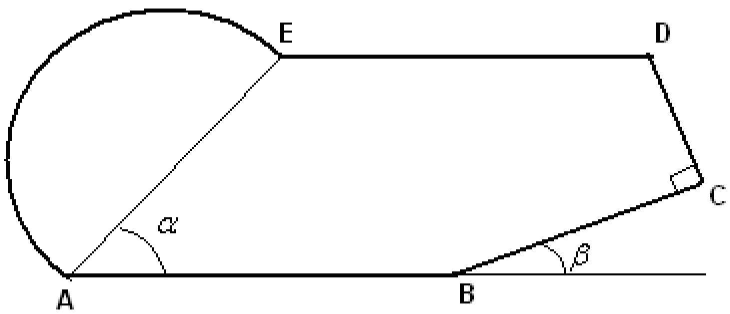


Figure 2

SOLUTION DU TD N°3

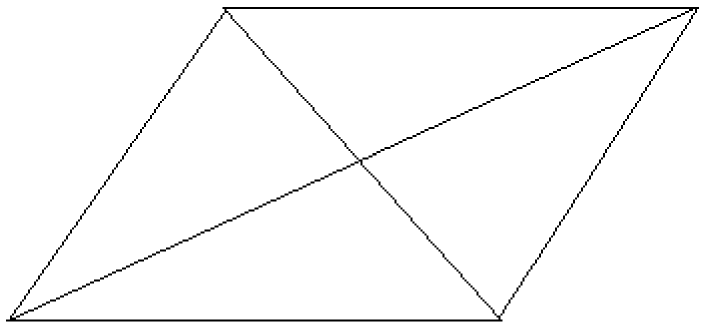
<u>Exercice 1</u>

a- Le point de rencontre des diagonales est un centre de symétrie pour le parallélogramme. Or on a vu que tout centre de symétrie d'une structure homogène est un centre de gravité.

En effet, si la structure possède un centre de symétrie O, alors on peut décomposer la surface en deux parties S1 et S2 telle que S2 soit le symétrique de S1 par rapport à O.

On par définition : $m.\vec{OG} = \int_S \vec{OG_i}dm = \int_{S1} \vec{OG_i}dm + \int_{S2} \vec{OG_i}dm = \int_{S1} \vec{OG_i}dm + \int_{S1} -\vec{OG_i}dm = 0$

D'où G=O

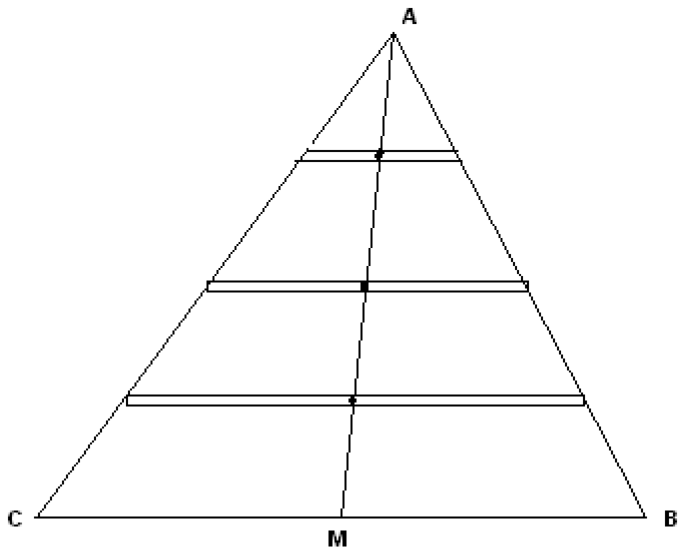


b- Soit un triangle ABC, on décompose la surface en tranches infinitésimales (épaisseur très petite) parallèles à BC. Le centre de gravité de chaque tranche est situé en son milieu. Or on a vu que le centre de gravité d'un solide composé de deux autres solides de centres de gravité G1 et G2 est situé sur la droite G1G2. Donc le centre de gravité du triangle est situé sur la droite reliant les milieux de chaque tranche, il se trouve donc sur la médiane AM.

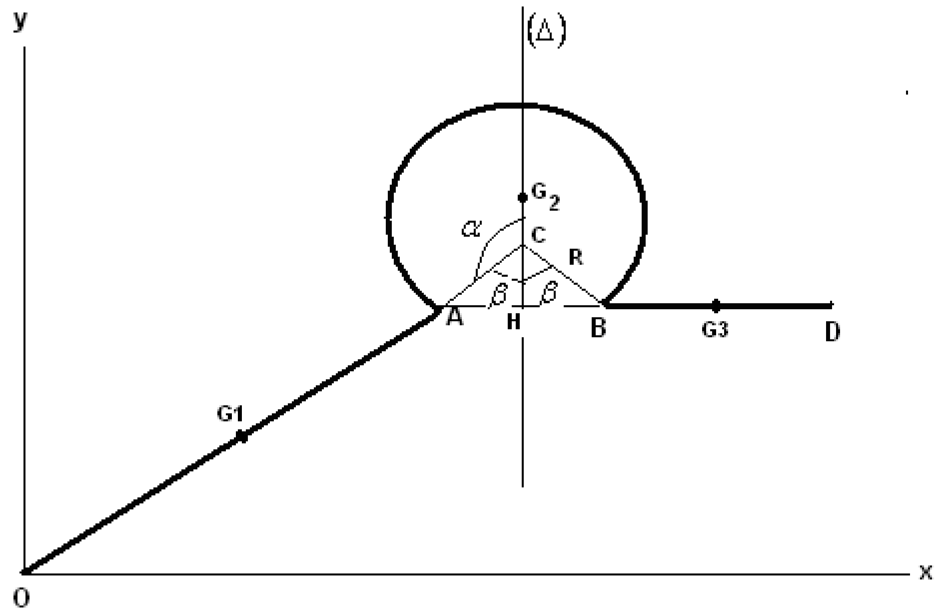
D'une façon similaire, on peut montrer qu'il se trouve sur les 2 autres médianes.

Le centre de gravité est donc le point d'intersection des médianes.

En utilisant la géométrie des triangles, on montre que $AG = \frac{2}{3} AM$



Exercice 2



On note d'abord que le centre C du cercle se trouve sur la médiatrice du segment [AB].
On a : AB=2, AC=BC=R=2

$\alpha = \pi - \beta$, $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{BH}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$,

La tige OA a pour longueur $l_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ *, son centre de gravité* G_1 *est situé au milieu de OA.*

$$O\vec{G}_1 = \frac{O\vec{A}}{2} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$$

La forme circulaire a pour longueur $l_2 = 2\alpha R = \frac{5}{3}\pi R = \frac{10}{3}\pi$ *, son centre de gravité* G_2 *est situé sur son axe de symétrie* (Δ)*, d'après le formulaire, on a :*

$$CG_2 = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha} = \frac{2R}{5\pi} = \frac{4}{5\pi}$$

On a $O\vec{G}_2 = O\vec{H} + H\vec{C} + C\vec{G}_2 = 5\vec{i} + 3\vec{j} + \left(R\cos\beta + \frac{4}{5\pi}\right)\vec{j}$

$$O\vec{G}_2 = O\vec{H} + H\vec{C} + C\vec{G}_2 = 5\vec{i} + \left(3 + \sqrt{3} + \frac{4}{5\pi}\right)\vec{j}$$

La tige BD a pour longueur $l_3 = 4$ *, son centre de gravité* G_3 *est situé au milieu de BD.*

$$O\vec{G}_3 = O\vec{B} + \frac{B\vec{D}}{2} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{4\vec{i}}{2} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$$

Le centre de gravité G de la tige est donnée par : $O\vec{G} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i O\vec{G}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \sigma l_i O\vec{G}_i}{\sum_{i=1}^{3} \sigma l_i}$

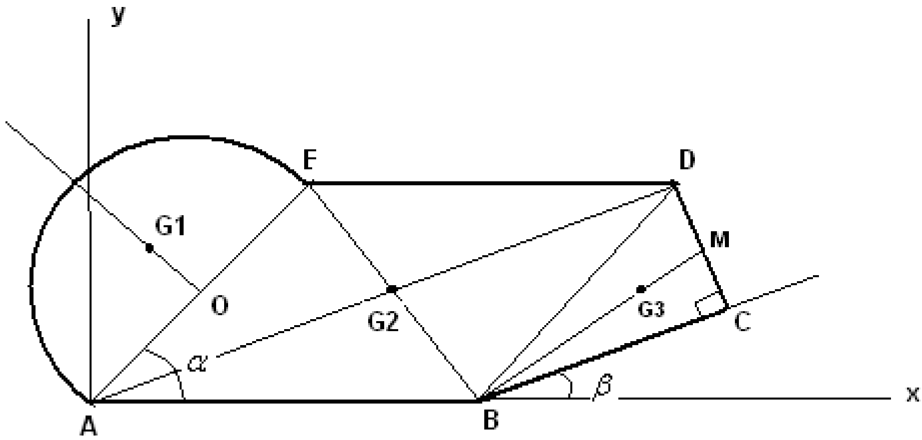
$m_i = \sigma l_i$ *(*σ *est la masse linéique). La tige étant homogène donc* σ *est constante, et par conséquent :*

$$O\vec{G} = \frac{\sum_{i=1}^{3} l_i O\vec{G}_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} = \frac{l_1 O\vec{G}_1 + l_2 O\vec{G}_2 + l_3 O\vec{G}_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

$$\vec{OG} = \frac{5\left(2\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\right)+\frac{10}{3}\pi\left(5\vec{i}+\left(3+\sqrt{3}+\frac{4}{5\pi}\right)\vec{j}\right)+4\left(8\vec{i}+3\vec{j}\right)}{5+\frac{10}{3}\pi+4} = 4.02\vec{i}+3.06\vec{j}$$

Le centre de gravité G a pour coordonnées (4.02, 3.06)

Exercice 3



La surface en question peut-être décomposée en 3 éléments : un demi-cercle de centre O et de rayon OA, un parallélogramme ABDE, et un triangle droit BCD.

1- Le demi-cercle a pour rayon $R = OA = \frac{AE}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{BC^2+CD^2}}{2} = \frac{\sqrt{64+36}}{2} = 5$

Sa surface est égale à $S_1 = \frac{\pi R^2}{2} = 39.27$*, son centre de gravité G1 est (voir formulaire) tel que :*

$$OG1 = \frac{4R}{3\pi}$$

On $\vec{AG_1} = \vec{AO} + \vec{OG_1} = R\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}\right)+\frac{4R}{3\pi}\left(-\sin\alpha\,\vec{i}+\cos\alpha\,\vec{j}\right)$

$$\vec{AG_1} = \left(R\cos\alpha-\frac{4R}{3\pi}\sin\alpha\right)\vec{i}+\left(R\sin\alpha+\frac{4R}{3\pi}\cos\alpha\right)\vec{j} = 0.66\vec{i}+5.39\vec{j}$$

2- Pour le parallélogramme ABDE, la surface est égale à :

$S_2 = \left\|\vec{AB}\wedge\vec{AE}\right\| = AB\ AE\sin\alpha = 12\ \ 10\sin 60° = 103.92$

Son centre de gravité G2 est tel que :

$$\vec{AG_2} = \frac{\vec{AD}}{2} = \frac{\vec{AB}+\vec{BD}}{2} = \frac{AB\,\vec{i}+BD\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}\right)}{2} = \frac{\left(AB+BD\cos\alpha\right)\vec{i}+BD\sin\alpha\,\vec{j}}{2}$$

$$\vec{AG_2} = \frac{\left(AB+BD\cos\alpha\right)\vec{i}+BD\sin\,\vec{j}}{2} = 8.5\vec{i}+4.33\vec{j}$$

3- Le triangle BCD a pour surface $S_3 = \frac{BC\ \ \mathrm{CD}}{2} = \frac{8\ \ 6}{2} = 24$*, son centre de gravité G3 est situé sur la médiane BM, il est tel que :* $\vec{BG_3} = \frac{2}{3}\vec{BM}$

$$\vec{BM} = \vec{BC}+\vec{CM} = BC\left(\cos\beta\,\vec{i}+\sin\beta\,\vec{j}\right)+CM\left(-\sin\beta\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}\right) = 5.43\vec{i}+6.60\vec{j}$$

$$\vec{AG}_3 = \vec{AB} + \vec{BG}_3 = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BM} = 12\vec{i} + \frac{2}{3}\left(5.43\vec{i} + 6.60\vec{j}\right) = 15.62\vec{i} + 4.40\vec{j}$$

Le centre de gravité est donnée par : $\vec{AG} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{AG}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} \lambda S_i \vec{AG}_i}{\sum_{i=1}^{3} \lambda S_i}$ *car* $m_i = \lambda l_i$

λ *est la masse surfacique. La tige étant homogène,* λ *est constante, et par conséquent :*

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^{3} S_i \vec{AG}_i}{\sum_{i=1}^{3} S_i} = \frac{S_1 \vec{AG}_1 + S_2 \vec{AG}_2 + S_3 \vec{AG}_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

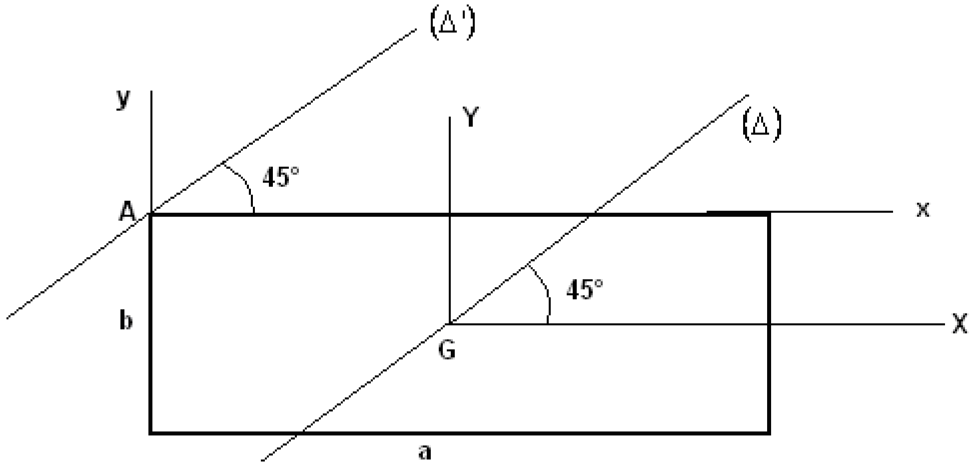
$$\vec{AG} = \frac{39.27\left(0.66\vec{i} + 5.39\vec{j}\right) + 103.92\left(8.5\vec{i} + 4.33\vec{j}\right) + 24\left(15.62\vec{i} + 4.40\vec{j}\right)}{39.27 + 103.92 + 24} = 7.68\vec{i} + 4.59\vec{j}$$

Par rapport au repère A(x,y), le centre de gravité a pour coordonnées G(7.68,4.59).

_TD N°4_
CINETIQUE
APPLICATION AU TENSEUR D'INERTIE

Exercice 1

a- Calculer les tenseurs d'inertie suivant les repères GXYZ et Axyz d'une plaque rectangulaire de masse M, de longueur a et de largeur b.

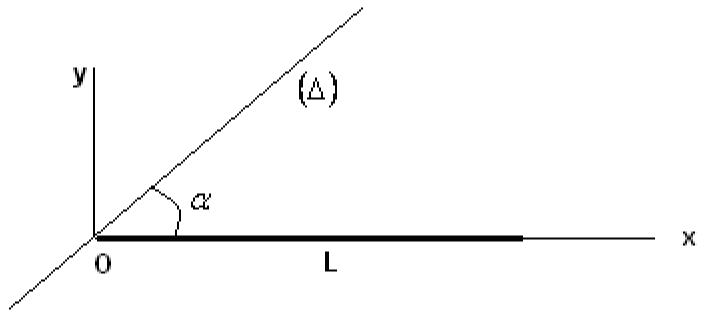


b- Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe (Δ) passant par G et faisant un angle de 45° avec GX .

c- Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe (Δ') passant par A et faisant un angle de 45° avec Ax

Exercice 2

Calculer le moment d'inertie d'une tige homogène de longueur l, par rapport à une droite (Δ) passant par l'une de ses extrémités et faisant avec elle un angle α



Exercice 3

Trouver le tenseur d'inertie d'un cylindre creux de masse M, de hauteur H, de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2, par rapport à un repère dont un axe est l'axe de révolution et les 2 autres sont dans le plan de base du cylindre.

En déduire le tenseur d'inertie d'un :

- *a- cerceau de masse M*
- *b- disque de masse M*
- *c- cylindre plein de masse M*

SOLUTION DU TD N°4

Exercice1

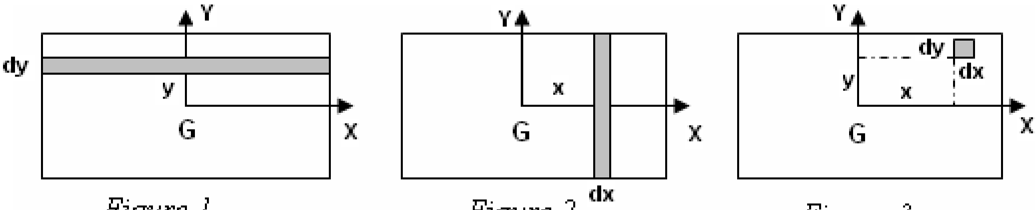


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

Le solide est une plaque de dimension a x b. Sa surface est $S = ab$ *, sa Masse :* $M = \lambda S$

d'où $\lambda = \frac{M}{S} = \frac{M}{ab}$ *. Pour calculer* J_{XX} *, on découpe le domaine en plaques rectangulaires horizontales infiniment petites (figure 1) de telle sorte que la distance entre cette plaque et l'axe (GX) soit constante. Cette plaque a pour surface* $dS = ady$ *et pour masse :*

$$dm = \lambda dS = \frac{M}{ab}ady = \frac{M}{b}dy$$

$$J_{XX} = \int_S y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \frac{M}{a} dy = \frac{M}{b}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{M}{3b}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right) = \frac{M\,b^2}{12}$$

En découpant le solide en plaques rectangulaires verticales (figure 2) ($dm = \lambda dS = \frac{M}{a}dx$ *)*

On obtient : $J_{YY} = \int_S x^2 dm = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{M}{a} dx = \frac{M}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{M}{3a}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3 - \left(-\frac{a}{2}\right)^3\right) = \frac{M\,a^2}{12}$

$$J_{ZZ} = \int_S \left(x^2 + y^2\right)dm = \int_S \left(x^2\right)dm + \int_S \left(y^2\right)dm = J_{XX} + J_{YY} = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$

Pour calculer $J_{XY} = \int_S xydm$ *, on découpe le domaine (figure 3) en plaques rectangulaires de surface* $dS = dxdy$ *et de masse* $dm = \lambda dS = \frac{M}{ab}dxdy = \frac{M}{ab}dxdy$ *.*

$$J_{XY} = \int_S xydm = \frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2} xdx \int_{-b/2}^{b/2} ydy = \frac{M}{ab}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(-\frac{b}{2}\right)^2\right) = 0.$$

$J_{XZ} = J_{YZ} = 0$ *car z=0*

Ce résultat était attendu, car les axes (GX), (GY) et (GZ) sont des axes de symétrie, donc des axes principaux et par conséquent les produits d'inertie sont nuls.

Remarque : On pouvait utiliser le découpage de la figure 3, pour calculer J_{XX}

$$J_{XX} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \frac{M}{ab} dxdy = \frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{M}{ab}\left(a - (-a)\right)\frac{1}{3}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right) = \frac{M}{12}b^2.$$

$$\left[J_G\right]_{XYZ} = \frac{M}{12}\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer le tenseur d'inertie par rapport au repère Axyz, il suffit de changer les bornes de l'intégrale, 0 à a pour x, et 0 à b pour y, ou appliquer le théorème de Huygens pour les moments d'inertie.

$$[J_A]_{xyz} = [J_G]_{XYZ} + \begin{bmatrix} M + \left(\frac{b}{2}\right)^2 & -M\frac{b}{2}\frac{a}{2} & 0 \\ -M\frac{b}{2}\frac{a}{2} & M + \left(\frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & \frac{-ab}{4} & 0 \\ \frac{-ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2+a^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$J_\Delta = \langle u\rangle [J_G]_{XYZ}\{u\} = \frac{\mathrm{M}}{24}\left(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2\right) \qquad J_{\Delta'} = \langle u\rangle [J_A]_{xyz}\{u\} = \frac{\mathrm{M}}{12}\left(2\,\mathrm{a}^2 + 2\,\mathrm{b}^2 - 3ab\right)$$

$$\text{avec}\,\langle \mathrm{u}\rangle = \langle \cos 45°, \sin 45°, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,1,0\rangle$$

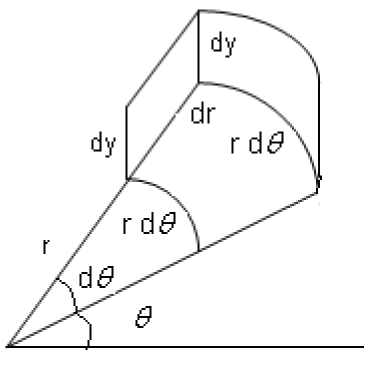
<u>Exercice 2</u>

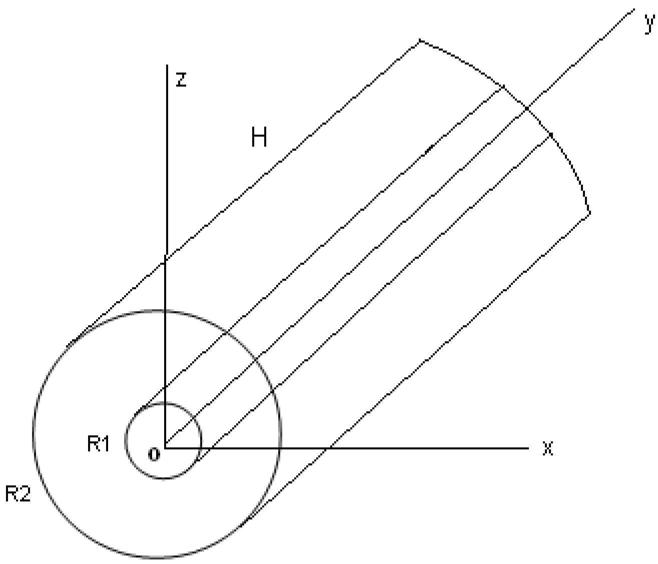
Pour trouver le tenseur d'inertie de la tige, il suffit de remplacer dans la formule de $[J_A]_{xyz}$ *l par a et b par zéro.*

$$[J_O]_{xyz} = \frac{M\,l^2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_\Delta = \langle u\rangle [J_O]_{xyz}\{u\} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)\frac{M\,l^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{M\,l^2}{3}\sin^2\alpha$$

<u>Exercice 3</u>





Pour calculer le tenseur d'inertie des formes circulaires, on préfère utiliser les coordonnées cylindriques r, θ, y *:*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \\ y = y \end{cases}.$$

Pour trouver l'élément de volume dV, on fait varier r de dr, θ de $d\theta$, et y de dy, on obtient :

$$dV = dr\, rd\theta\, dy\,,\ R1 \le r \le R2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le y \le H$$

Le Volume total vaut : $V = \pi H\left(R_2^2 - R_1^2\right)$,

La masse totale vaut : $M = \rho V \Rightarrow \rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)H}$

De même $dm = \rho dV = \dfrac{M}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)H} dr\, rd\theta\, dy$

$$J_{xx} = \int_V \left(y^2 + z^2\right)dm = \int_V \left(y^2 + r^2\sin^2\theta\right)dm = \int_V y^2 dm + \int_V r^2\sin^2\theta dm$$

$$= \frac{M}{\pi H\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left(\int_V y^2\, drrd\theta dy + \int_V r^2\sin^2\theta drrd\theta dy\right)$$

$$J_{xx} = \frac{M}{\pi H\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left(\int_{R_1}^{R_2} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H y^2 dy + \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \int_0^H dy\right) = \frac{M\,H^2}{3} + \frac{M}{4}\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

Pour des raisons de symétrie on a : $J_{zz} = J_{xx}$

$$J_{yy} = \int_V \left(x^2 + z^2\right)dm = \int_V r^2 \frac{M}{\pi H\left(R_2^2 - R_1^2\right)} dr\, rd\theta\, dy = \frac{M}{\pi H\left(R_2^2 - R_1^2\right)} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dy = \frac{M}{2}\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

Les axes (ox), (oy), (oz) sont des axes principaux, donc les produits d'inertie sont nuls.

$$\left[J_O\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} \dfrac{M\,H^2}{3} + \dfrac{M}{4}\left(R_2^2 + R_1^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{M}{2}\left(R_2^2 + R_1^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{M\,H^2}{3} + \dfrac{M}{4}\left(R_2^2 + R_1^2\right) \end{bmatrix}$$

<u>Application</u>

a- Tenseur d'inertie d'un cerceau

Pour un cerceau, on a : $R_2 = R_1 = R$ *et H=0, d'où :*

$$\left[J_O\right]_{xyz} = \begin{bmatrix} \dfrac{M\,R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & M\,R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{M\,R^2}{2} \end{bmatrix}$$

b- tenseur d'inertie d'un disque

Pour un disque, on a $R_2 = R,\ R_1 = 0$ *et H=0, d'où*

$$[J_O]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{M\ R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\ R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ R^2}{4} \end{bmatrix}$$

c- tenseur d'inertie d'un cylindre plein

Pour un cylindre plein, on a $R_2 = R,\ R_1 = 0$*, d'où :*

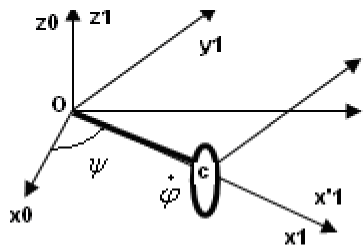
$$[J_O]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{M\ H^2}{3} + \frac{M}{4} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{2} R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ H^2}{3} + \frac{M}{4} R^2 \end{bmatrix}$$

TD N°5
CINETIQUE
CALCUL DU MOMENT CINETIQUE ET DE L'ENERGIE INETIQUE

<u>Exercice 1</u>

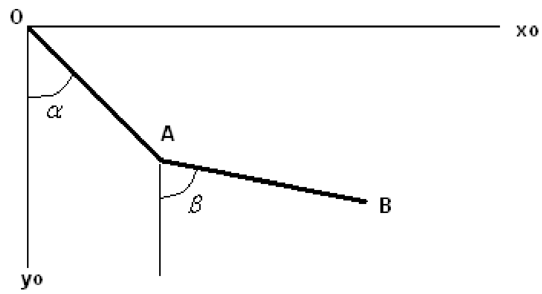
Soit un solide (S) constitué d'une tige OC de masse M', et d'un cerceau de masse M et de rayon R tournant autour de son axe horizontal, l'ensemble tourne autour de Ozo qui est fixe et vertical.

a- Calculer le moment cinétique de (S) par rapport à O.
b- Calculer son énergie cinétique.



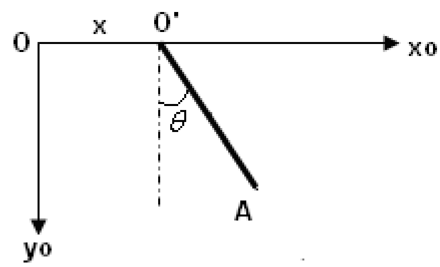
<u>Exercice 2</u>

Deux tiges homogènes OA et AB, de masse M et de longueur l sont articulées entre-elles en A. La première est mobile autour de O. Elles sont assujetties à rester dans le plan vertical Oxoyo.
Calculer le moment cinétique du système $\vec{\sigma}_O$ et son énergie cinétique.



<u>Exercice 3</u>

On considère un pendule dit elliptique constitué d'une barre O'A homogène (masse M, longueur l) qui oscille dans le plan vertical et dont l'extrémité O' glisse sur l'axe horizontal Oxo.
Calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ et son énergie cinétique.



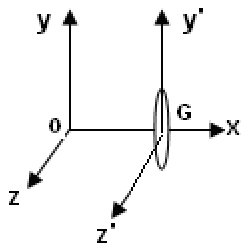
<u>Exercice 4</u>

Soit une plaque homogène de masse m, de cotés 2a et 2b, et de centre de gravité G, tournant autour d'une de ses diagonales fixe à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.
Calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ et son énergie cinétique

SOLUTION DU TD N°5

1- Rappel

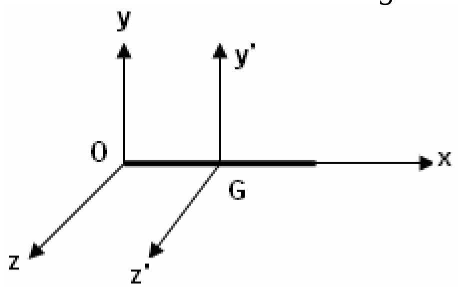
Le tenseur d'inertie d'un cerceau de rayon R (TD n°4, exercice 3) :



$$[J_G]_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

D'après d'Huygens : $$[J_O]_{xyz} = \begin{pmatrix} M\ R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\ R^2}{2} + M\ a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ R^2}{2} + M\ a^2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Le tenseur d'inertie d'une barre de longueur l est (TD n°4, exercice 2) :

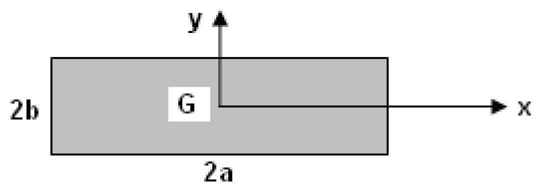


$$[J_G]_{x'y'z'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\ l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ l^2}{12} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

D'après d'Huygens :

$$[J_O]_{xyz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\ l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\ l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\ l^2}{3} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Le tenseur d'inertie d'une plaque rectangulaire de cotés 2a et 2b est (TD n°4, exercice 1) :

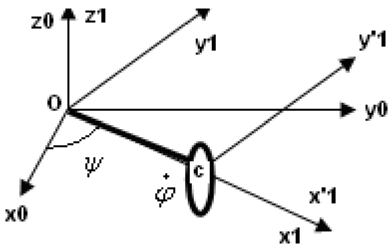


$$[J_G]_{xyz} = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Exercice 1

Ro : repère fixe Oxoyozo
R1: repère mobile Ox1y1z1
Rc: repère Cx'1y'1z'1

$\vec{\omega}_{S1/0} = \dot{\psi}\vec{k} \qquad \vec{\omega}_{S2/0} = \dot{\varphi}\vec{i}_1 + \dot{\psi}\vec{k}$



Soit un solide (S) formé de S1 (tige oc) et de S2 (cerceau) :
Le moment cinétique du système est égal à : $\vec{\sigma}_O\ (S) = \vec{\sigma}_O\ (S1) + \vec{\sigma}_O\ (S2)$

$$\vec{\sigma}_O\ (S1) = \left[J_O\right]_{x1y1z1}\vec{\omega}_{1/0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M'l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M'l^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M'l^2}{3}\dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{M'l^2}{3}\dot{\psi}\,\vec{k}_1$$

$$\vec{\sigma}_O\ (S2) = \left[J_O\right]_{x1y1z1}\vec{\omega}_{2/0} = \begin{pmatrix} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2}+Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2}+Ma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MR^2\dot{\varphi} \\ 0 \\ \left(\frac{MR^2}{2}+Ma^2\right)\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O\ (S) = \vec{\sigma}_O\ (S1) + \vec{\sigma}_O\ (S2) = \begin{pmatrix} M\,R^2\,\dot{\varphi} \\ 0 \\ \left(\frac{M\,R^2}{2} + M\,a^2 + \frac{M'l^2}{3}\right)\dot{\psi} \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique du système est égal à :

$$T(S1) = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{1/0}\ \vec{\sigma}_O\ (S1) = \frac{M'l^2}{6}\dot{\psi}^2$$

$$T(S2) = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{2/0}\ \vec{\sigma}_O\ (S2) = \frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)\dot{\psi}^2$$

$$T(S) = T(S1) + T(S2) = \frac{M'l^2}{6}\dot{\psi}^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)\dot{\psi}^2$$

Autre méthode, d'après le théorème de Koenig :

$$\vec{\sigma}_O\ (S2) = M\ \vec{OC}\wedge\vec{V}_c + \vec{\sigma}_C \qquad \vec{\sigma}_C = \left[J_C\right]_{x1y1z1}\vec{\omega}_{2/0}$$

$$\vec{OC} = a\,\vec{i}_1,\quad \vec{V}_c = \left.\frac{d\,\vec{OC}}{dt}\right/_{R_0} = a\,\vec{\omega}_{1/0}\wedge\vec{i}_1 = a\dot{\psi}\,\vec{k}_1\wedge\vec{i}_1 = a\dot{\psi}\,\vec{j}_1$$

$$M\ \vec{OC}\wedge\vec{V}_c = Ma\,\dot{\psi}\,\vec{i}_1\wedge\vec{j}_1 = M\,a^2\,\dot{\psi}\,\vec{k}_1$$

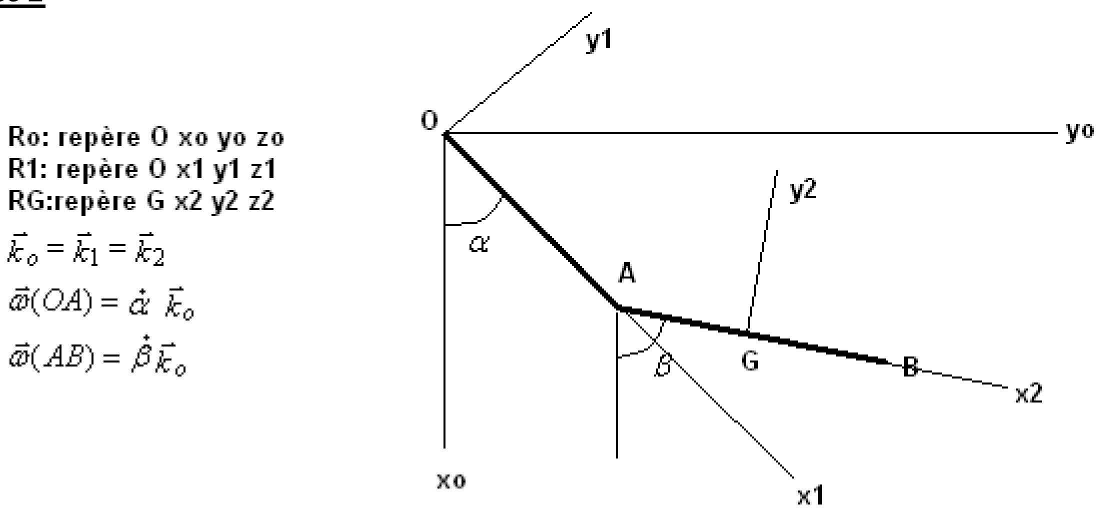
D'après l'éq (4): $\vec{\sigma}_O \;(S2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (M\,a^2)\dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M\,R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\,R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\,R^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\,R^2\,\dot{\varphi} \\ 0 \\ \left(\frac{M\,R^2}{2} + M\,a^2\right)\dot{\psi} \end{pmatrix}$

$$T(S2) = \frac{1}{2} M\,V_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{2/0}\;\vec{\sigma}_C$$

$$T(S2) = \frac{M\,a^2}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{M\,R^2}{4}\dot{\psi}^2 = \frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)\dot{\psi}^2$$

$$T(S) = T(S1) + T(S2) = \frac{M'\,l^2}{6}\dot{\psi}^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{R^2}{2} + a^2\right)\dot{\psi}^2$$

Exercice 2



$$\vec{\sigma}_O\;(OA) = [J_O]_{x1y1z1}\vec{\omega}(OA) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\,l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\,l^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M\,l^2}{3}\dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{M\,l^2}{3}\dot{\alpha}\,\vec{k}_1 = \frac{M\,l^2}{3}\dot{\alpha}\,\vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_O\;(AB) = M\;O\vec{G} \wedge \vec{V}_G + \vec{\sigma}_G(AB)$$

$$O\vec{G}\Big|_{R_1} = O\vec{A} + A\vec{G} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos(\beta-\alpha) \\ \frac{l}{2}\sin(\beta-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l + \frac{l}{2}\cos(\beta-\alpha) \\ \frac{l}{2}\sin(\beta-\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_G = \frac{d\,O\vec{G}}{\mathrm{dt}}\Big/_{R_0} = \frac{d\,O\vec{G}}{\mathrm{dt}}\Big/_{R_1} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge O\vec{G}$$

$$\vec{V}_G=\begin{pmatrix}-\frac{l}{2}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\sin(\beta-\alpha)\\ \frac{l}{2}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\cos(\beta-\alpha)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}l+\frac{l}{2}\cos(\beta-\alpha)\\ \frac{l}{2}\sin(\beta-\alpha)\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{l}{2}\dot{\beta}\sin(\beta-\alpha)\\ l\dot{\alpha}+\frac{l}{2}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\\ 0\end{pmatrix}_{R_1}$$

$$M\,\vec{OG}\wedge\vec{V}_G=\begin{pmatrix}l+\frac{l}{2}\cos(\beta-\alpha)\\ \frac{l}{2}\sin(\beta-\alpha)\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\frac{l}{2}\dot{\beta}\sin(\beta-\alpha)\\ l\dot{\alpha}+\frac{l}{2}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\\ 0\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}0\\0\\ \dot{\alpha}l^2+\dot{\beta}\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\beta-\alpha)\end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_G(AB)=\left[J\,G\right]_{x2y2z2}\vec{\omega}(AB)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{M\,l^2}{12}&0\\0&0&\frac{M\,l^2}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{M\,l^2}{12}\dot{\beta}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O\ (AB)=M\left[\dot{\alpha}l^2+\dot{\beta}\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\beta-\alpha)\right]\vec{k}_1+\left(\frac{M\,l^2}{12}\dot{\beta}\right)\vec{k}_2$$

$$\vec{\sigma}_O\ (AB)=M\left[\dot{\alpha}l^2+\dot{\beta}\frac{l^2}{3}+\frac{l^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\beta-\alpha)\right]\vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_O\ (systeme)=\vec{\sigma}_O\ (OA)+\vec{\sigma}_O\ (AB)=M\left[\dot{\alpha}\frac{4l^2}{3}+\dot{\beta}\frac{l^2}{3}+\frac{l^2}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\beta-\alpha)\right]\vec{k}_0$$

$$\textbf{\textit{T(OA)}}=\frac{1}{2}\vec{\omega}(OA)\,\vec{\sigma}_O\ (OA)=\frac{M\,l^2}{6}\dot{\alpha}^2$$

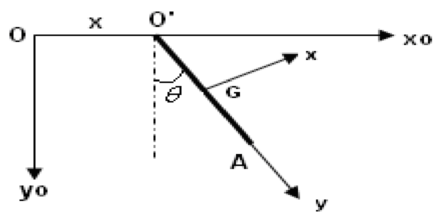
$$T(AB)=\frac{1}{2}M\,V_G^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}(AB)\ \vec{\sigma}_G(\mathrm{AB})$$

$$\textbf{\textit{T(AB)}}=\frac{1}{2}M\left(\frac{l^2}{4}\dot{\beta}^2+l^2\dot{\alpha}^2+l^2\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\right)+M\frac{l^2}{24}\dot{\beta}^2$$

$$\textbf{\textit{T(AB)}}=\frac{1}{2}M\,l^2\left(\frac{\dot{\beta}^2}{3}+\dot{\alpha}^2+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\right)$$

$$\textbf{\textit{T(systeme)=T(OA)+T(AB)}}=\frac{1}{2}M\,l^2\left(\frac{\dot{\beta}^2}{3}+\frac{4\dot{\alpha}^2}{3}+\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\right)$$

Exercice 3



$$\vec{\sigma}_O\ (O'A) = M\ O\vec{G} \wedge \vec{V}_G + \vec{\sigma}_G,\ \vec{\sigma}_G = \lfloor J_G \rfloor_{xyz}\, \vec{\omega}(O'A)/R_0 \ ,$$

$$\vec{\sigma}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M\,l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M\,l^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M\,l^2}{12}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{M\,l^2}{12}\dot{\theta}\,\vec{k}$$

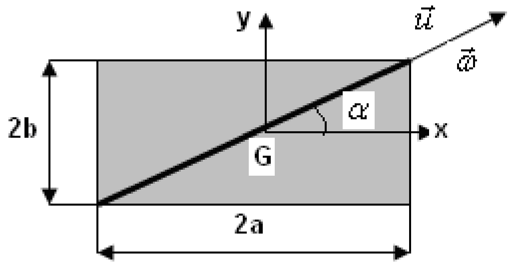
$$\mathrm{O}\vec{\mathrm{G}} = OO'^{\vec{}} + O'\vec{G} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\sin\theta \\ \frac{l}{2}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{l}{2}\sin\theta \\ \frac{l}{2}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_G = \left.\frac{d\ O\vec{G}}{\mathrm{dt}}\right/_{R_0} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ -\frac{l}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M\ O\vec{G} \wedge \vec{V}_G = -\left[\frac{Ml}{2}\left(x\dot{\theta}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta\right) + \frac{M\,l^2}{4}\dot{\theta}\right]\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_O\ (O'A) = M\ O\vec{G} \wedge \vec{V}_G + \vec{\sigma}_G = -M\left[\frac{l}{2}\left(x\dot{\theta}\sin\theta + \dot{x}\cos\theta\right) + \frac{l^2}{6}\dot{\theta}\right]\vec{k}$$

$$T(O'A) = \frac{1}{2}M\,V_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}(AB)\ \vec{\sigma}_G\ = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{3} + l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

Exercice 4



La plaque tourne autour de sa diagonale de vecteur unitaire $\vec{u}$

$$\vec{\omega}(\,plaque) = \omega\vec{u} = \omega(\vec{i}\,\cos\alpha + \vec{j}\,\sin\alpha) = \omega(\vec{i}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \vec{j}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\vec{i} + b\vec{j}\right)$$

$$\vec{\sigma}_G\ (\,plaque\,) = \left[J_G\right]_{xyz}\vec{\omega}(\,plaque\,) = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Mab\ \omega}{3\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

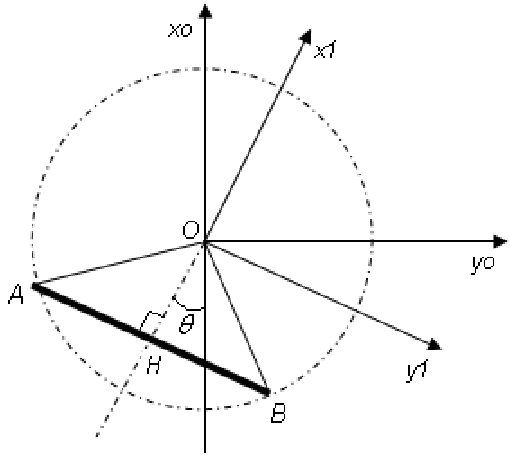
$$T(\,plaque) = \frac{1}{2}\vec{\omega}(\,plaque)\,\vec{\sigma}_G\ \ (\,plaque) = M\ \omega^2\frac{a^2b^2}{3\left(a^2+b^2\right)}$$

TD N°6
CINETIQUE
THEOREMES GENERAUX

<u>Exercice 1</u>

Une barre AB homogène de masse M, de longueur l glisse sans frottement dans un cerceau.

Trouver la relation $\dot{\theta} = f(\theta)$ *à partir du théorème du moment cinétique. (on pose a=OH)*



<u>Exercice 2</u>

Soit le roulement sans glissement d'un disque mince de masse M, de rayon r sur un anneau fixe de rayon R.

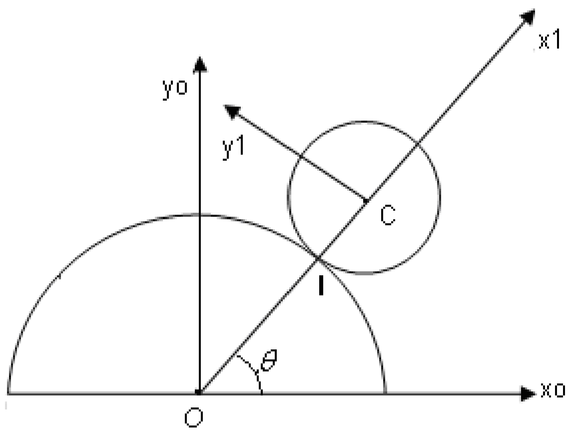
- Trouver la relation entre $\dot{\theta}$ *et* $\dot{\varphi}$ *(* $\dot{\varphi}$ *est la vitesse angulaire du disque)*

- Trouver la relation $\dot{\theta} = f(\theta)$ *à partir du théorème du moment cinétique*

- Calculer $\vec{T}$ *et* $\vec{N}$ *les composantes de la réaction de contact en I.*

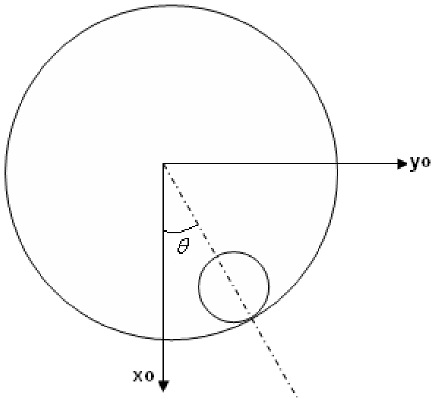
- Montrer qu'à partir d'une certaine valeur θ_1 *de* θ*, le disque quitte l'anneau.*

On prend : $\theta(0) = \theta_0$ *et* $\dot{\theta}(0) = 0$



Exercice 3

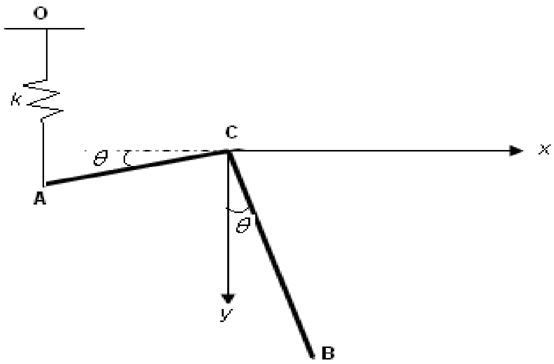
Un disque mince (masse M, rayon r) roule sans glisser à l'intérieur d'un anneau fixe de rayon R. Calculer à partir du théorème de l'énergie cinétique, la période des petites oscillations du disque sachant que les frottements de roulement sont négligeables.



Exercice 4

Deux tiges CA et CB de masse m et 2m, de longueur l et 2l (respectivement) sont solidaires et perpendiculaires entre elles. Elles sont assujetties par des liaisons parfaites à tourner dans un plan vertical autour du point fixe C. En A, est fixé un ressort de raideur k, la position de son extrémité O est choisie de façon que CA soit horizontale lorsque le système est en équilibre.

- Calculer la période des oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre.



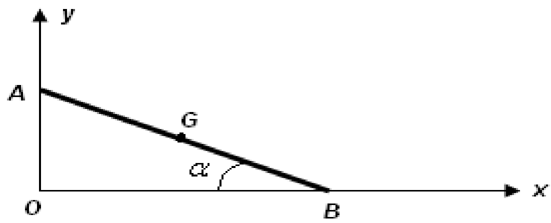
Exercice 5

Les extrémités A et B d'une barre homogène de masse M et de longueur 2l glissent sans frottement, A sur un axe vertical, B sur un axe horizontal. On repère la position de la barre par l'angle α qu'elle fait avec l'axe l'horizontal. On prend à t=0 : $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\dot{\alpha}(0) = 0$.

- Ecrire l'équation du mouvement $\dot{\alpha} = f(\alpha)$ à partir du théorème de l'énergie cinétique.

- Calculer les réactions $\vec{R}_A$ et $\vec{R}_B$

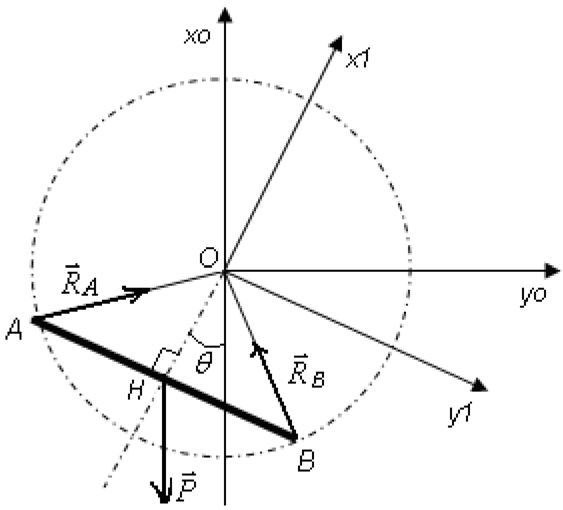
- Montrer qu'à partir d'une certaine valeur α_1 de α , le point A quitte l'axe vertical.



SOLUTION DU TD N°6

Exercice 1

Ro: repère O xo yo zo
R1: repère O x1 y1 z1
zo=z1



Le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe o donne :

$$\sum \vec{M}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \qquad (1)$$

$$\sum \vec{M}_o = O\vec{A} \wedge \vec{R}_A + O\vec{B} \wedge \vec{R}_B + O\vec{H} \wedge \vec{P} = O\vec{H} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -Mg\cos\theta \\ Mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -agM\sin\theta\,\vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_o = \left[J_O\right]_{x1y1z1} \vec{\omega}_{barre} = \begin{pmatrix} M\dfrac{l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M\,a^2 & 0 \\ 0 & 0 & M\dfrac{l^2}{12}+M\,a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = M\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)\dot{\theta}\,\vec{k}_0$$

l'équation (1) donne:

$$\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)\ddot{\theta} + ag\sin\theta = 0$$

Pour intégrer cette équation, on multiplie par $d\theta$ *:*

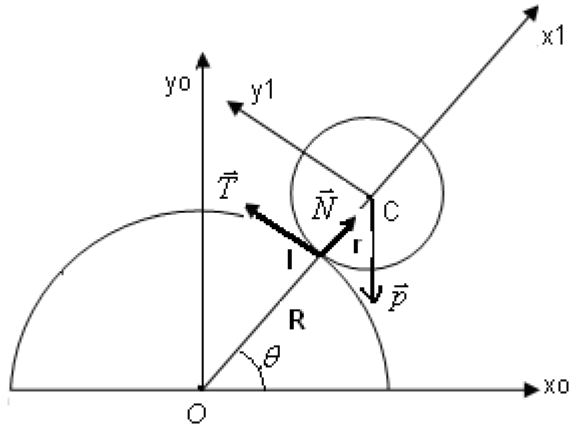
$$\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)\ddot{\theta}d\theta + ag\sin\theta d\theta = 0$$

$$\ddot{\theta}d\theta = \frac{d\dot{\theta}}{dt}d\theta = \dot{\theta}d\dot{\theta}$$

Soit après intégration $$\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} - ag\cos\theta = Cte \qquad (3)$$

Exercice 2

Ro :repère O xo yo zo
Rc:repère C x1 y1 z1
zo//z1



θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe oz $\vec{\omega}_{1/0} = \theta \ \ \vec{k}$

φ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Iz.
La vitesse totale du disque est égale à : $\vec{\omega}_{2/0} = (\theta + \varphi)\vec{k}$

Roulement sans glissement : $\vec{V}_I = 0$

$$O\vec{C} = (R+r)\vec{i}_1 \Rightarrow \vec{V}_C = (R+r)\frac{d\vec{i}_1}{dt} = (R+r)\dot{\theta}\,\vec{j}_1$$

$$\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{\omega}_{disq} \wedge C\vec{I} = 0 \Rightarrow \ (R+r)\dot{\theta}\,\vec{j}_1 + (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{k} \wedge (-r\,\vec{i}_1) = \ (R\dot{\theta} - r\dot{\varphi})\vec{j}_1 = 0$$

$$R\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Le théorème du moment cinétique appliqué en C (centre de masse) donne :

$$\sum \vec{M}_c = \frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} \qquad (2)$$

$$\sum \vec{M}_c = C\vec{I} \wedge \vec{T} = -r\,\vec{i}_1 \wedge (T\,\vec{j}_1) = -rT(\vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1) = -rT\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_c = [J_c]_{x1y1z1} = \frac{M\,r^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dot{\theta}+\dot{\varphi}\end{pmatrix} = \frac{M\,r^2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{k} = \frac{Mr}{2}(r+R)\dot{\theta} \quad \text{car} \quad \dot{\varphi} = \frac{R}{r}\dot{\theta}$$

D'après l'équation (2) on obtient : $T = -\dfrac{M}{2}(r+R)\ddot{\theta}$ *(3)*

Appliquons maintenant le théorème du centre de masse :

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = M\,\vec{\gamma}_C \qquad (4)$$

$$\vec{\gamma}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left((R+r)\dot{\theta}\,\vec{j}_1\right) = (R+r)\ddot{\theta}\,\vec{j}_1 + (R+r)\dot{\theta}\frac{d\vec{j}_1}{dt} = (R+r)\ddot{\theta}\,\vec{j}_1 - (R+r)\dot{\theta}^2\,\vec{i}_1$$

En projetant l'éq (4) sur le repère Rc, on obtient :

$$\begin{cases} T - Mg\cos\theta = M(R+r)\ddot{\theta} \\ N - Mg\sin\theta = -M(R+r)\dot{\theta}^2 \end{cases} \qquad (5)$$

En remplaçant T par (3) on obtient :

$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(r+R)}\cos\theta=0 \qquad (6)$$

$$\ddot{\theta}d\theta+\frac{2g}{3(r+R)}\cos\theta d\theta=0 \Rightarrow \ddot{\theta}d\theta+\frac{2g}{3(r+R)}\cos\theta d\theta=0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2}+\frac{2g}{3(r+R)}\sin\theta=Cte$$

En utilisant les conditions initiales $(\theta(0)=\theta_0,\dot{\theta}(0)=0)$, *on obtient* $\frac{2g}{3(r+R)}\sin\theta_0=Cte$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2}+\frac{2g}{3(r+R)}(\sin\theta-\sin\theta_0)=0 \qquad (7)$$

Calcul des réactions

D'après les éq (3) et (6) $\quad T=\frac{1}{3}Mg\cos\theta \qquad$ *(8)*

D'après les éq (5) et (7) $\quad N=\frac{1}{3}Mg(7\sin\theta-4\sin\theta_0) \qquad$ *(9)*

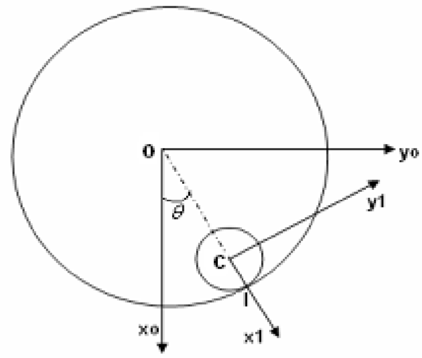
Le disque quitte l'anneau quand N=0, d'où $\quad \sin\theta=\frac{4}{7}\sin\theta_0 \qquad$ *(10)*

<u>Exercice 3</u>

θ *est l'angle de rotation du disque autour de l'axe oz* $\vec{\omega}_{1/0}=\dot{\theta}\vec{k}$

φ *est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Iz.*

La vitesse totale du disque est égale à : $\vec{\omega}_{2/0}=(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{k}$



D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt}=P\left(\sum\vec{F}\right) \qquad (1)$$

$P\left(\sum\vec{F}\right)=\vec{p}\vec{V}_C+\vec{R}\vec{V}_I=\vec{p}.\vec{V}_C$ *car* $\vec{V}_I=0$ *(roulement sans glissement)*

I est le point de contact appartenant au disque, $\vec{R}$ *est force de réaction en I.*

$$O\vec{C}=(R-r)\vec{i}_1 \Rightarrow \vec{V}_C=(R-r)\frac{d\vec{i}_1}{dt}=(R-r)\dot{\theta}\vec{j}_1$$

$$P\left(\sum\vec{F}\right)=\vec{p}\vec{V}_C=Mg(R-r)\dot{\theta}\cos(\vec{p},\vec{j}_1)=Mg(R-r)\dot{\theta}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-Mg(R-r)\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\vec{V}_I=\vec{V}_C+\vec{\omega}_{2/0}\wedge C\vec{I}=(R-r)\dot{\theta}\vec{j}_1+(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{k}\wedge r\vec{i}_1=(R\dot{\theta}+r\dot{\varphi})\vec{i}_1=0$$

$$\vec{V}_I=0 \quad \Rightarrow \quad R\dot{\theta}+r\dot{\varphi}=0$$

L'énergie cinétique du disque est égale à :

$$T=\frac{1}{2}MV_C^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}_{2/0}[J_C]_{x_1y_1z_1}\vec{\omega}_{2/0}$$

Le disque est en mouvement plan, d'où :

$$T=\frac{1}{2}M\,V_C^2+\frac{1}{2}J_c\,\vec{\omega}_{2/0}^2=\frac{M}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\frac{M\,r^2}{2}(\dot{\theta}+\dot{\varphi})^2=\frac{3}{4}M\,(R-r)^2\dot{\theta}^2 \quad (car\ \dot{\varphi}=-\frac{R}{r}\dot{\theta})$$

L'équation (1) donne: $\frac{3}{2}M\,(R-r)^2\ddot{\theta}\dot{\theta}=-Mg(R-r)\sin\dot{\theta})$

soit :
$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(R-r)}\sin\theta=0$$

Pour des petites oscillations (θ *très petite), on a* $\sin\theta\approx\theta$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0 \qquad avec\ \ \omega^2=\frac{2g}{3(R-r)}$$

La période des petites oscillation est égale à :

$$Période=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}}=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

***Remarque** : La seule force qui travaille est celle de la pesanteur (poids), on peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie totale.* $T+E_p$ *est constante.*

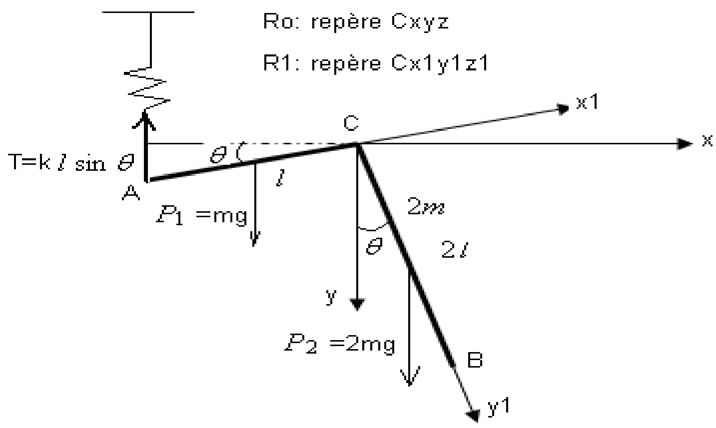
L'énergie potentielle $E_p=-Mg(R-r)\cos\theta$

$$T+E_p=\frac{3}{4}M\,(R-r)^2\dot{\theta}^2-Mg(R-r)\cos\theta=Cons\tan te$$

$$\frac{d(T+E_p)}{dt}=0\Rightarrow\frac{3}{2}M\,(R-r)^2\ddot{\theta}\dot{\theta}+Mg(R-r)\dot{\theta}\sin\theta=0$$

Soit :
$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(R-r)}\sin\theta=0$$

<u>Exercice 4</u>



D'après le théorème du moment cinétique appliqué en c (c fixe) :

$$\sum \vec{M}_c = \frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} \qquad (1)$$

$$\vec{\sigma}_c = \vec{\sigma}(CA) + \vec{\sigma}(CB) = \frac{l^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R1} + 2m\frac{(2l)^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ \end{pmatrix}_{R1} = 3ml^2\dot{\theta}\vec{k} \qquad (2)$$

$$\sum \vec{M}_c = -Tl\cos\theta - P_2 l\sin\theta + P_1\frac{l}{2}\cos\theta = -k\,l^2\sin\theta\cos\theta - 2mgl\sin\theta + mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

Pour des oscillations de faible amplitude on prend : $\sin\theta \approx \theta \quad \cos\theta = 1$

$$\sum \vec{M}_c = -\theta l(kl + 2mg) + mg\frac{l}{2} \qquad (3)$$

D'après l'éq (1) on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{(kl + 2mg)}{3ml}\theta = \frac{g}{6l} \qquad (4)$$

D'où

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(kl+2mg)}{3ml}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3ml}{(kl+2mg)}} \qquad (5)$$

***Remarque** : Les seules forces qui travaillent sont le poids et celle engendrée par le ressort, on peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie. L'énergie totale* $T + E_p$ *est constante.*

Le système (2 tiges) est rotation autour de l'axe fixe Cz, L'énergie cinétique est égal à:

$$T = \frac{1}{2}J_C\omega^2 = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left(m\frac{l^2}{3} + 2m\frac{(2l)^2}{3}\right) = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$ *J_C est le moment d'inertie autour de Cz.*

L'énergie potentielle $E_p = \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 - mg\frac{l}{2}\sin\theta - 2mgl\cos\theta$

$$T + E_p = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 - mg\frac{l}{2}\sin\theta - 2mgl\cos\theta$$

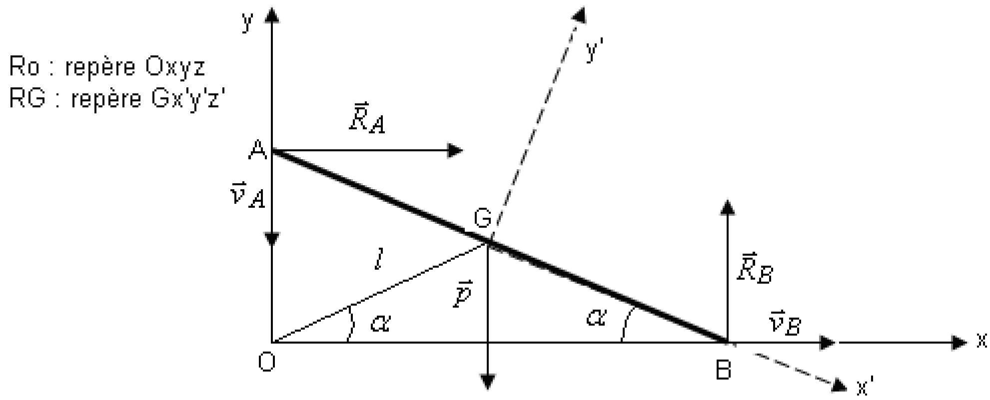
$$\frac{dt(T+E_p)}{dt} = 3ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + kl^2\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\dot{\theta}\cos\theta + 2mgl\dot{\theta}\sin\theta$$

Pour des oscillations de faible amplitude on prend $\sin\theta \approx \theta \quad \cos\theta = 1$

$$\frac{dt(T+E_p)}{dt} = \dot{\theta}\left(3ml^2\ddot{\theta} + (kl^2 + 2mgl)\theta - mg\frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{dt(T+E_p)}{dt} = 0 \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{(kl+2mg)}{3ml}\theta = \frac{g}{6l}$$

Exercice 5



D'après le théorème de l'énergie cinétique on a

$$\frac{dT}{dt} = P\left(\sum \vec{F}\right) \qquad (1)$$

$$O\vec{G} = \begin{pmatrix} l\cos\alpha \\ l\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{Ro} \quad \vec{V}_G = \begin{pmatrix} -l\dot{\alpha}\sin\alpha \\ l\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{Ro} \quad \vec{\gamma}_G = \begin{pmatrix} -l\dot{\alpha}^2\cos\alpha - l\ddot{\alpha}\sin\alpha \\ -l\dot{\alpha}^2\sin\alpha + l\ddot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{Ro}$$

Le solide est en mouvement plan, son énergie cinétique vaut :

$$T = \frac{1}{2}J_G\omega^2 + \frac{1}{2}M\,V_G^2$$

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{k} \qquad J_G = \frac{M\,(2l)^2}{12} = \frac{M\,l^2}{3}$$

$$T = \frac{1}{2}M\,(l\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}\frac{M\,l^2}{3}\dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3}M\,l^2\,\dot{\alpha}^2$$

$$P\left(\sum \vec{F}\right) = \vec{p}\,\vec{v}_G + \vec{R}_A\vec{v}_A + \vec{v}_B\vec{R}_B = \vec{p}\,\vec{v}_G = -Mgl\,\dot{\alpha}\cos\alpha$$

En absence du frottement, les réactions sont normales au plan de déplacement.

D'où $\quad \vec{R}_A\vec{v}_A = \vec{v}_B\vec{R}_B = 0$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt} = P\left(\sum \vec{F}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\alpha} + \frac{3g}{4l}\cos\alpha = 0$$

Après intégration : $\dfrac{\dot{\alpha}^2}{2} + \dfrac{3g}{4l}\sin\alpha = Cte$

Remarque *: La seule force qui travaille est celle de la pesanteur (poids), on peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie. L'énergie totale* $T + E_p$ *est constante.*

L'énergie potentielle $E_p = Mgl\sin\alpha$

$$T + E_p = \frac{2}{3}M\,l^2\dot{\alpha}^2 + Mgl\cos\alpha = Cte \quad d'où \quad \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{3g}{4l}\sin\alpha = Cte$$

Conditions initiales ($\alpha(0)=\alpha_0$ $\quad \dot{\alpha}(0)=0$ *), on obtient :*

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2}+\frac{3g}{4l}(\sin\alpha-\sin\alpha_0)=0$$

Réactions : (on applique le théorème du centre de masse)

$$\vec{P}+\vec{R}_A+\vec{R}_B=M\,\vec{\gamma}_G \qquad \Rightarrow\begin{cases} R_A=M\,\gamma_x=M\left(-l\,\dot{\alpha}^2\cos\alpha-l\ddot{\alpha}\sin\alpha\right)\\ R_B=Mg+M\,\gamma_y=Mg+M\left(-l\,\dot{\alpha}^2\sin\alpha+l\ddot{\alpha}\cos\alpha\right)\end{cases}$$

Sachant que $\ddot{\alpha}=-\frac{3g}{4l}\cos\alpha$ *et* $\dot{\alpha}^2=-\frac{3g}{2l}(\sin\alpha-\sin\alpha_0)$

$$\mathrm{R_A}=\frac{3}{2}Mg\cos\alpha\left(\frac{3}{2}\sin\alpha-\sin\alpha_0\right) \qquad R_B=Mg+\frac{3}{4}Mg\sin\alpha\left(\sin\alpha-2\sin\alpha_0\right)$$

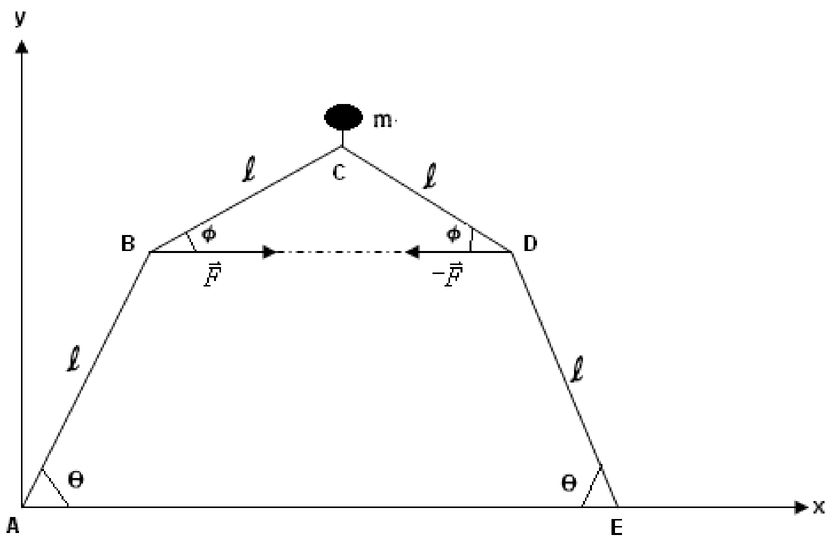
Le point A quitte la verticale quand $R_A=0$ *: soit*

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\sin\alpha_0$$

TD N° 7
PRINCIPE DU TRAVAIL VRTUEL

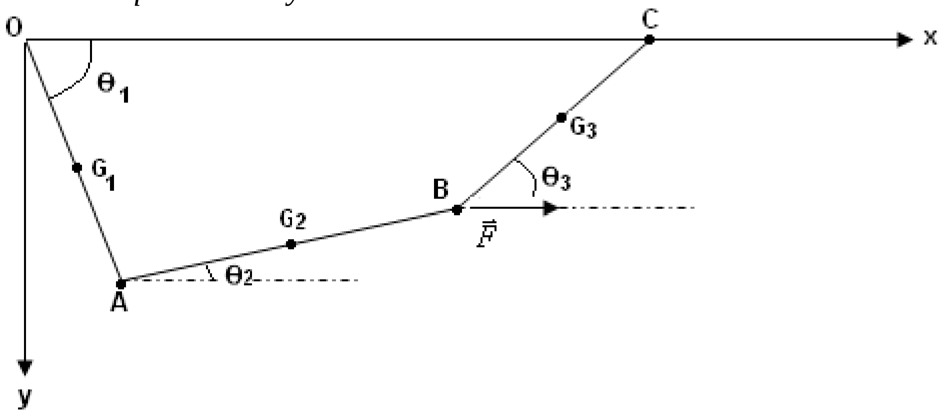
Exercice 1

On considère le système (S), on exerce en B et D une force $\vec{F}$ *selon l'axe horizontal, en C est appliqué le poids* $\vec{P}$ *du à la masse m. Les barres sont de masse négligeables et toutes les liaisons sont parfaites.*
Trouver la relation entre F et P lorsque le système est en équilibre sachant que θ, ϕ, *et AE sont constantes (E point fixe).*



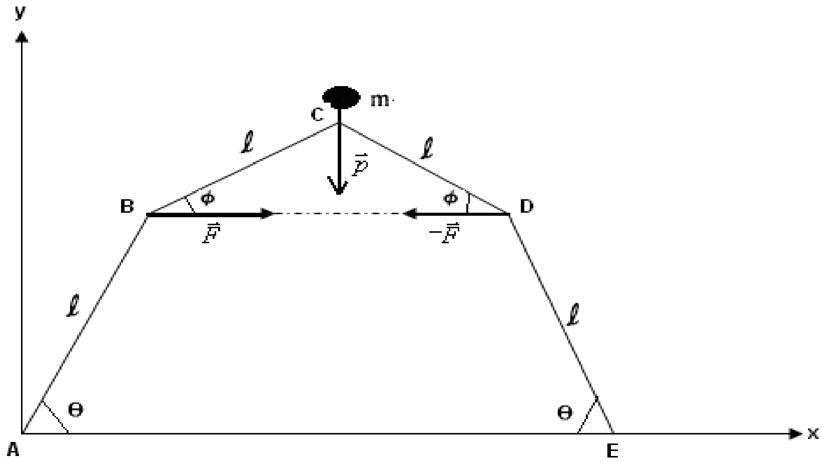
Exercice 2

OA, AB et BC barres homogènes identiques (m, 2l) mobiles dans un plan vertical et parfaitement articulées entre elles. O est un point fixe. Le point C est astreint à rester sur l'axe ox, il n'y a pas de frottements en O et C. En B, est appliquée une force $\vec{F}$.
Trouver la position d'équilibre du système.



SOLUTION DU TD N°7

Exercice 1



Le système est en équilibre, donc d'après le principe du travail virtuel, on a :

$$\sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$$

Puisque les liaisons sont parfaites, les seules forces qui travaillent sont $\vec{F}$ *et* $\vec{p}$ *:*

$\vec{F}\,\delta\vec{r}_B - \vec{F}\,\delta\vec{r}_D + \vec{p}\,\delta\vec{r}_C = F\,\delta x_B - F\,\delta x_D - mg\,\delta y_C = 0$

$$\begin{cases} x_B = l\cos\theta \\ x_D = l\cos\theta + 2l\cos\phi \\ y_C = l\sin\theta + l\sin\phi \end{cases} \quad \textit{d'où} \quad \begin{cases} \delta x_B = -l\sin\theta\delta\theta \\ \delta x_D = -l\sin\theta\delta\theta - 2l\sin\phi\delta\phi \\ \delta y_C = l\cos\theta\delta\theta + l\cos\phi\delta\phi \end{cases}$$

$$-Fl\sin\theta\delta\theta + F\left(l\sin\theta\delta\theta + 2l\sin\phi\delta\phi\right) - mg\left(l\cos\theta\delta\theta + l\cos\phi\delta\phi\right) = 0$$

$$\left(2Fl\sin\phi - mgl\cos\phi\right)\delta\phi - mgl\cos\theta\delta\theta = 0$$

$$F\delta\phi = \frac{mg}{2}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\delta\phi + \frac{\cos\theta}{\sin\phi}\delta\theta\right)$$

θ *et* ϕ *ne sont pas indépendants.*

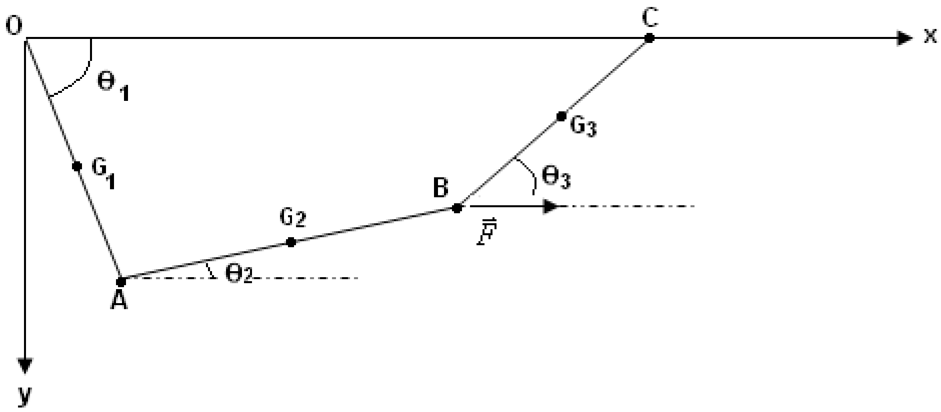
En effet : $AE = 2l\cos\theta + 2l\cos\phi = Cte$ *d'où* $\delta AE = -2l(\sin\theta\delta\theta + \sin\phi\delta\phi) = 0$

$\delta\theta = -\dfrac{\sin\phi}{\sin\theta}\delta\phi$ *, en injectant cette expression dans la relation de la force, on obtient :*

$$F\delta\phi = \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{tg\phi} - \frac{1}{tg\theta}\right)\delta\phi$$

$$F = \frac{mg}{2}\left(\frac{1}{tg\phi} - \frac{1}{tg\theta}\right)$$

Exercice 2



Le système est en équilibre, donc d'après le principe du travail virtuel, on a :

$$\sum \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0$$

Les seules forces qui travaillent sont les poids des barres appliqués en leurs centres de gravité, et la force $\vec{F}$.

$$\vec{p}_1 \delta\vec{OG}_1 + \vec{p}_2 \delta\vec{OG}_2 + \vec{p}_3 \delta\vec{OG}_3 + \vec{F}\,\delta\vec{OB} = p\,\delta y_{G1} + p\,\delta y_{G2} + p\,\delta y_{G3} + F\,\delta x_B = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} y_{G1} = l\sin\theta_1 \\ y_{G2} = 2l\sin\theta_1 - l\sin\theta_2 \\ y_{G3} = 2l\sin\theta_1 - 2l\sin\theta_2 - l\sin\theta_3 \\ x_B = 2l\cos\theta_1 + 2l\cos\theta_2 \end{cases}$$

$y_C = 2l(\sin\theta_1 - \sin\theta_2 - \sin\theta_3) = 0$ *d'où* $\sin\theta_3 = \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \Rightarrow y_{G3} = l\sin\theta_1 - l\sin\theta_2$

$$\begin{cases} \delta y_{G1} = l\cos\theta_1\,\delta\theta_1 \\ \delta y_{G2} = 2l\cos\theta_1\,\delta\theta_1 - l\cos\theta_2\,\delta\theta_2 \\ \delta y_{G3} = l\cos\theta_1\,\delta\theta_1 - l\cos\theta_2\,\delta\theta_2 \\ \delta x_B = -2l(\sin\theta_1\,\delta\theta_1 + \sin\theta_2\,\delta\theta_2) \end{cases}$$

En injectant ces expressions dans l'équation (1), on obtient :

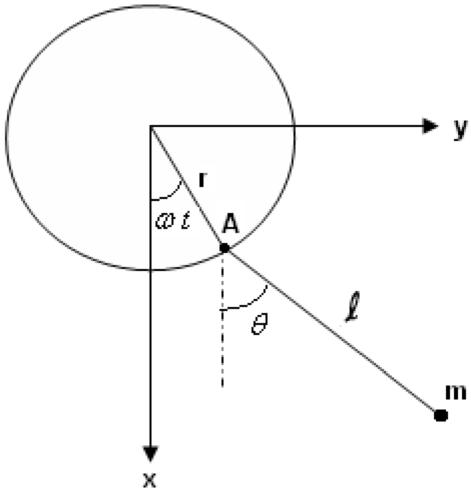
$$4pl\cos\theta_1\,\delta\theta_1 - 2pl\cos\theta_2\,\delta\theta_2 - 2Fl(\sin\theta_1\,\delta\theta_1 + \sin\theta_2\,\delta\theta_2) = 0$$
$$(2p\cos\theta_1 - F\sin\theta_1)\delta\theta_1 - (p\cos\theta_2 + F\sin\theta_2)\delta\theta_2 = 0 \quad \forall\, \delta\theta_1, \delta\theta_2$$

D'où
$$\begin{cases} 2p\cos\theta_1 - F\sin\theta_1 = 0 \\ p\cos\theta_2 + F\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\,\theta_1 = \dfrac{2mg}{F} \\ tg\,\theta_2 = \dfrac{-mg}{F} \end{cases}$$

_TD N°8_
EQUATIONS DE LAGRANGE

**Exercice 1**

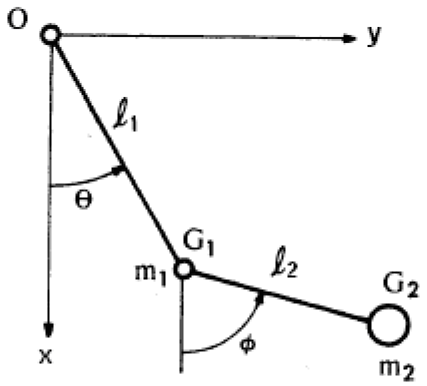
Dans un plan vertical oxy, on considère un pendule simple (l,m) dont le point de suspension A se déplace à vitesse angulaire constante ω*, sur un cercle de rayon r.*
Calculer le lagrangien du système et en déduire l'équation du mouvement.



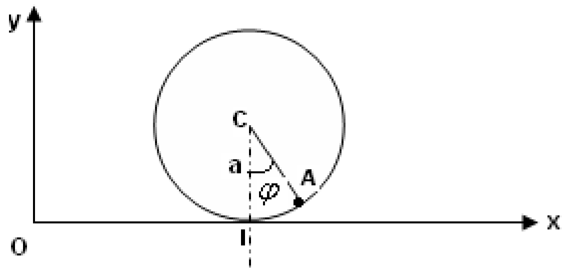
**Exercice 2**

En G_1 et G_2 sont disposées deux masse ponctuelles m_1 et m_2 .
La masse des barres est négligeable et les liaisons sont parfaites.

Etablir le lagrangien du système
Endéduire les équations du mouvement dans le cas des faibles oscillations



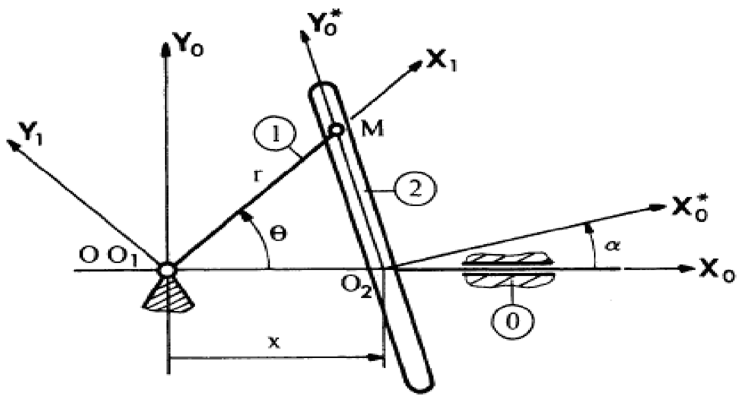
Exercice 3



Une bille A, assimilée à un point matériel de masse m, peut se déplacer librement sans frottement sur un cerceau (C) (masse m, rayon a et centre C) grâce à une liaison bilatérale parfaite. Le cerceau est astreint à se déplacer dans un plan vertical fixe en roulant sans glisser sur l'axe Ox, $\varphi = (ox, CA)$*,* θ *est l'angle de rotation propre du cerceau.*

-Ecrire les équations du mouvement à partir des équations de Lagrange.
- Calculer la période des petites oscillations.

Exercice 4



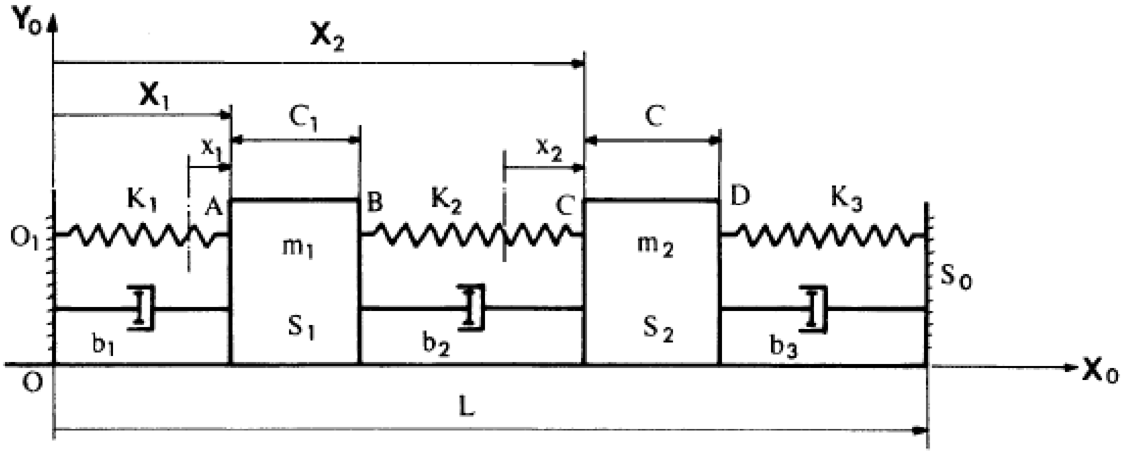
- on applique à la manivelle (1) un torseur $[T_1]$: $\begin{cases} \vec{F}_1 = 0 \\ \vec{M}_1(O) = C\,\vec{z}_0 \end{cases}$

- on applique à la coulisse (2) un torseur $[T_2]$: $\begin{cases} \vec{F}_2 = F_2\,\vec{X}_0 \\ \vec{M}_2(O_2) = 0 \end{cases}$

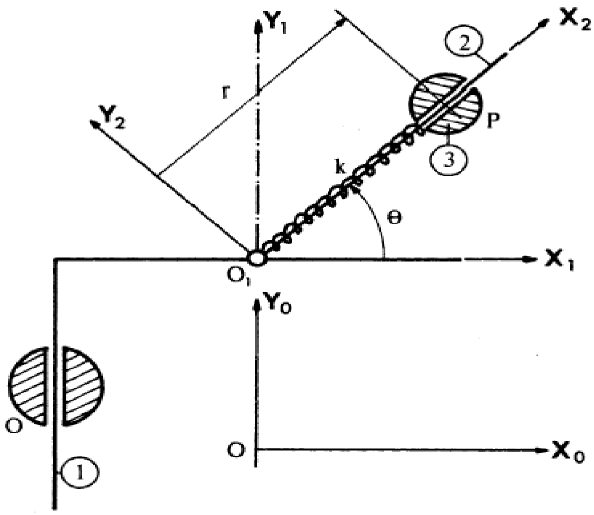
on demande de trouver l'équation du mouvement sachant que les liaisons sont parfaites.

Exercice 5

Les raideurs des ressorts sont k_1, k_2, k_3. *Les liaisons sont dissipatives (non- parfaites). Les coefficients d'amortissement sont* b_1, b_2, b_3.
Trouver les équations de mouvement.



Exercice 6



Toutes les liaisons sont parfaites. La raideur du ressort est k et sa longueur à vide est r_0*. La masse de (3) est m. Le mouvement de* O_1 *est tel que* $\vec{OO_1} = \frac{1}{2}\gamma t^2 \vec{Y}_0$.

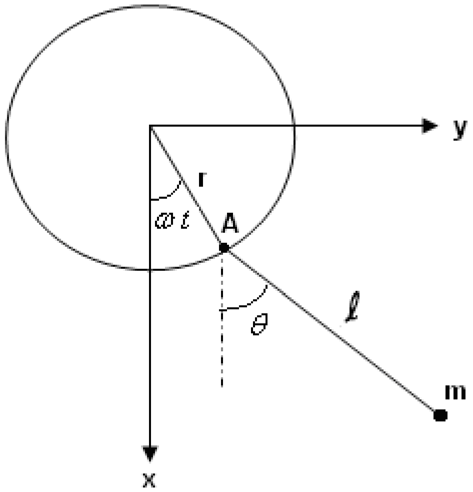
1- Calculer les énergies cinétique et potentielle du système.

2- Etablir les équations du mouvement en utilisant les équations de Lagrange.

SOLUTION Du TD N°8

Exercice 1

La masse m a pour coordonnées :



$$\begin{cases} x = r\cos\omega t + l\cos\theta \\ y = r\sin\omega t + l\sin\theta \end{cases}$$

Sa vitesse est égale à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega\sin\omega t - l\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = r\omega\cos\omega t + l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

son énergie cinétique est égale à:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\omega^2 r^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\omega r\dot{\theta}(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\omega^2 r^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\omega r\dot{\theta}\cos(\omega t - \theta)\right)$$

Son énergie potentielle est :

$$U = -mgx = -mg\left(r\cos\omega t + l\cos\theta\right)$$

On en déduit le lagrangien :

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\omega^2 r^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\omega r\dot{\theta}\cos(\omega t - \theta)\right) + mg\left(r\cos\omega t + l\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\left(l^2\dot{\theta} + l\omega r\cos(\omega t - \theta)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\left(l^2\ddot{\theta} - lr\omega(\omega - \dot{\theta})\sin(\omega t - \theta)\right)$$

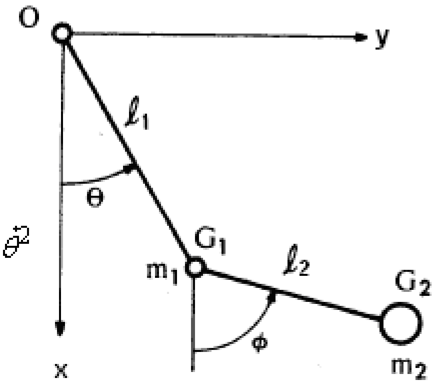
$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{m}{2}\left(2l\omega r\dot{\theta}\sin(\omega t - \theta)\right) - mgl\sin\theta = mlr\omega\dot{\theta}\sin(\omega t - \theta) - mgl\sin\theta$$

L'équation du mouvement donnée par Lagrange est :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = m\left(l^2\ddot{\theta} - lr\omega(\omega - \dot{\theta})\sin(\omega t - \theta)\right) - mlr\omega\dot{\theta}\sin(\omega t - \theta) + mgl\sin\theta = 0$$

Soit : $$l^2\ddot{\theta} - lr\omega^2\sin(\omega t - \theta) + gl\sin\theta = 0$$

Exercice 2



La masse m1 a pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos\theta \\ y_1 = l_1 \sin\theta \end{cases} \quad \text{et sa vitesse} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta} \cos\theta \end{cases}$$

Son énergie cinétique: $T_1 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2$

Son énergie potentielle:

$U_1 = -m_1 g\, x_1 = -m_1 g\, l_1 \cos\theta$

La masse m2 a pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos\theta + l_2 \cos\phi \\ y_2 = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\phi \end{cases} \quad \text{et sa vitesse} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta} \sin\theta - l_2 \dot{\phi} \sin\phi \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta} \cos\theta + l_2 \dot{\phi} \cos\phi \end{cases}$$

Son énergie cinétique: $T_2 = \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) = \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)$

Son énergie potentielle: $U_2 = -m_2 g\, x_2 = -m_2 g\left(l_1 \cos\theta + l_2 \cos\phi\right)$

Pour le système (les 2 masses) on a :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi)$$

$$U = U_1 + U_2 = -(m_1 + m_2) g\, l_1 \cos\theta - m_2 g\, l_2 \cos\phi$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\phi} \cos(\theta - \phi) + (m_1 + m_2) g\, l_1 \cos\theta + m_2 g\, l_2 \cos\phi$$

Pour les faibles oscillations (θ et ϕ sont très petites) :

$$\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2} \quad et \quad \cos(\theta - \phi) \approx 1 - \frac{(\theta - \phi)^2}{2}$$

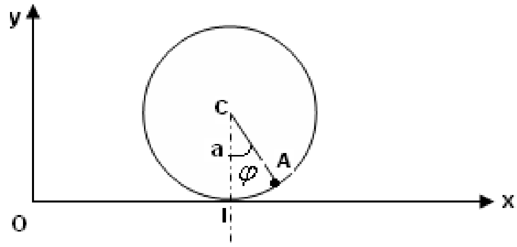
En négligeant les termes d'ordre 4, on obtient :

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}\dot{\phi} - (m_1 + m_2) g\, l_1 \frac{\theta^2}{2} - m_2 g\, l_2 \frac{\phi^2}{2} + (m_1 + m_2) g\, l_1 + m_2 g\, l_2$$

Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad \textbf{Soit} \quad \begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta} + m_2 l_2 \ddot{\phi} + (m_1 + m_2) g\theta = 0 \\ l_2 \ddot{\phi} + l_1 \ddot{\theta} + g\phi = 0 \end{cases}$$

Exercice 3



Pour la bille A on a : (on pose X=OI) :

$$\begin{cases} x = X + a\sin\varphi \\ y = a - a\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{X} + a\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y} = a\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$$

Son énergie cinétique est : $T_A = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$

Son énergie potentielle : $U_A = -mga\cos\varphi$

Le cerceau est en mouvement plan : $T_C = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$

Son énergie potentille est constante, on peut la prendre nulle : $U_C = 0$

Pour le système (bille+cerceau), on a :

$$T = T_C + T_A = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

$$U = U_A + U_C = -mga\cos\varphi$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + a^2\dot{\varphi}^2 + 2a\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga\cos\varphi$$

Le roulement étant sans glissement, d'où $\vec{V}_I = 0$

$$\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{\omega}_{cerceau} \wedge \vec{CI} = \dot{X}\vec{i} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (-a\vec{j}) = \left(\dot{X} + a\dot{\theta}\right)\vec{i} = 0$$

D'où $\dot{X} = -a\dot{\theta}$ *. En injectant cette relation dans le Lagrangien, on obtient :*

$$L = \frac{1}{2}ma^2\left(3\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi\right) + mga\cos\varphi$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\ddot{\theta} - \ddot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \\ a\ddot{\varphi} - a\ddot{\theta}\cos\varphi + a\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi + g\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

Pour les petites oscillations, on prend $\sin\varphi = \varphi$ *et* $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

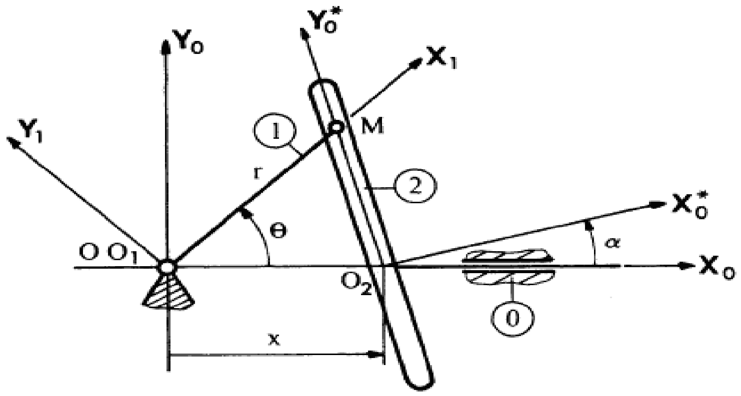
En négligeant les termes d'ordre 3, on obtient : $\begin{cases} 3\ddot{\theta} - \ddot{\varphi} = 0 \\ a\ddot{\varphi} - a\ddot{\theta} + g\varphi = 0 \end{cases}$

La première équation du système donne $\ddot{\theta} = \ddot{\varphi}/3$, *en remplaçant dans la seconde :*

$$\frac{2}{3}a\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{3g}{2a}$$

$$Periode = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

Exercice 4



a) Equation de liaison

Pour repérer le mouvement on emploie les paramètres x et θ . Mais ils ne sont pas indépendants , *ils sont* liés par la relation :

$$x - r\,\frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos\alpha} = 0 \qquad (1)$$

Elle est de type holonome.

b) Equation du mouvement en se ramenant à un paramètre

α) énergie cinétique

$$T° = T_1 + T_2$$

$$T° = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

I_1 désignant le moment d'inertie de (S_1) par rapport à $O\vec{Z}_0$ et M la masse de (S_2).

D'après (1) $\qquad \dot{x} = -r\,\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\alpha}\dot{\theta}$

$$T° = \frac{1}{2}\left[I_1 + M r^2 \left(\frac{\sin(\theta - \alpha)^2}{\cos\alpha}\right)\right]\dot{\theta}^2$$

β) *travail virtuel*

Les liaisons étant parfaites et la transformation compatible, *le travail virtuel* des seules actions données

$$\delta W = M_1\,\delta\theta + F_2\,\delta x$$

$\delta x = -r\,\dfrac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\alpha}\delta\theta$ dans une transformation compatible

$\delta W = \left[M_1 - F_2\,\dfrac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\alpha}\right]\delta\theta$ de la forme $\delta W = Q_\theta\,\delta\theta$

équation de LAGRANGE

Il y a un paramètre indépendant : θ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \left[I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin^2(\theta - \alpha)\right] \dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \left[I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin^2(\theta-\alpha)\right]\ddot\theta + 2 M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin(\theta-\alpha) \cos(\theta-\alpha) \dot\theta^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin(\theta-\alpha) \cos(\theta-\alpha) \dot\theta^2$$

d'où l'équation

$$\left[I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin^2(\theta-\alpha)\right]\ddot\theta + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)\dot\theta^2 = M_1-F_2 \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

c) Equation de LAGRANGE en conservant deux paramètres et en prenant une transformation virtuelle compatible

Les vitesses compatibles sont définies par

$$\delta x + r \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \delta\theta = 0$$

le travail virtuel $\delta W = M_1 \delta\theta + F_2 \delta x$

L'énergie cinétique est $T^\circ = \frac{1}{2} \left[I_1 \dot\theta^2 + M \dot x^2 \right]$

On peut donc écrire les équations de LAGRANGE en employant la méthode des multiplicateurs

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = M_1 + \lambda r \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot x} - \frac{\partial T}{\partial x} = F_2 + \lambda$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot\theta = M_1 + \lambda r \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} & (1) \\ M \ddot x = F_2 + \lambda & (2) \end{cases}$$

De l'équation de liaison, nous tirons

$$\dot x = - r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot\theta$$

$$\ddot x = - r \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \ddot\theta - r \frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \dot\theta^2$$

d'où de (2) $\lambda = - M r \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \ddot\theta - M r \dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \dot\theta^2$

En portant en (1)

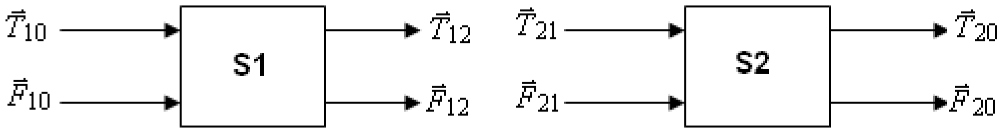
$$I_1 \ddot\theta = M_1 - M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin^2(\theta-\alpha) \ddot\theta - M r^2 \frac{\sin(\theta-\alpha).\cos\alpha}{\cos^2\alpha} \dot\theta^2 - F_2 r \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

soit

$$\left[I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin^2(\theta-\alpha)\right]\ddot\theta + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)\dot\theta^2 = M_1-F_2 \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

C'est bien l'équation déjà trouvée.

Exercice 5



Considérons le système (les deux masses + 3 ressorts), son énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Les liaisons étant non parfaites, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Q_1 *est la force totale appliquée sur S1 :* $Q_1 = T_{10} + T_{12} + F_{10} + F_{12}$

T_{10} *: est la force engendrée par le ressort 1, elle vaut :*

$T_{10} = -k_1 r_1^0 = -k_1 x_1$ *où* r_1^0 *est le déplacement de S1 par rapport à So.*

T_{12} *: est la force engendrée par le ressort 2, elle vaut :*

$T_{12} = -k_2 r_1^2 = -k_2 (x_1 - x_2)$ $\quad r_1^2$ *est le déplacement de S1 par rapport à S2*

F_{10} *et* F_{12} *sont des forces d'amortissement :*

$F_{10} = -b_1 v_1^0 = -b_1 \dot{x}_1$ $\quad v_1^0$ *est la vitesse de S1 par rapport à So*

$F_{12} = -b_2 v_1^2 = -b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ $\quad v_1^2$ *est la vitesse relative de S1 par rapport à S2*

$Q_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b_1 \dot{x}_1 - b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -(k_1 + k_2) x_1 - (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + k_2 x_2 + b_2 \dot{x}_2$

Q_2 *est la force totale appliquée sur S2 :* $\quad Q_2 = T_{20} + T_{21} + F_{20} + F_{21}$

$T_{20} = -k_3 x_2$ $\qquad\qquad F_{20} = -b_3 \dot{x}_2$

$T_{21} = -T_{12} = k_2 (x_1 - x_2)$ $\qquad\qquad F_{21} = -F_{12} = b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

$Q_2 = -k_3 x_2 + k_2 (x_1 - x_2) - b_3 \dot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -(k_3 + k_2) x_2 - (b_3 + b_2) \dot{x}_1 + k_2 x_1 + b_2 \dot{x}_1$

Le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2) x_1 - (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + k_2 x_2 + b_2 \dot{x}_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -(k_3 + k_2) x_2 - (b_3 + b_2) \dot{x}_2 + k_2 x_1 + b_2 \dot{x}_1 \end{cases}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_3 + b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + b_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remarque :

Si les liaisons étaient parfaites (pas d'amortissement), les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

U étant l'énergie potentielle des ressorts :

$$U = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 x_2^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3 x_2^2$$

Puisque les liaisons ne sont pas parfaites, on doit donc ajouter les forces de liaisons :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F_{10} + F_{12} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = F_{20} + F_{21} \end{cases}$$

Après avoir remplacé et dérivé, on obtient les mêmes équations :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\, x_1 - k_2\, x_2 = -(b_1 + b_2)\, \dot{x}_1 + b_2\, \dot{x}_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_3 + k_2)\, x_2 - k_2\, x_1 = -(b_3 + b_2)\, \dot{x}_1 + b_2\, \dot{x}_1 \end{cases}$$

Exercice 6

L'énergie cinétique du système (masse de (3) + ressort) est :

$$T = \frac{1}{2}m v_p^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2\right)$$

L'énergie potentielle du système est :

$$U = \frac{1}{2}k\,(r - r_o)^2 + mg\,y_p$$

On a : $\begin{cases} x_p = r\cos\theta \\ y_p = r\sin\theta + \dfrac{1}{2}\gamma t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_p = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y}_p = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta + t\gamma \end{cases}$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \gamma^2 t^2 + 2t\gamma\dot{r}\sin\theta + 2t\gamma r\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$U = \frac{1}{2}k\,(r - r_o)^2 + mg\left(r\sin\theta + \frac{1}{2}\gamma t^2\right)$$

Les liaisons sont parfaites, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{r} + t\gamma\dot{\theta}\cos\theta + (\gamma - g)\sin\theta - \dfrac{k}{m}(r - r_o) = 0 \\ r^2\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + t\gamma\dot{r}\cos\theta - t\gamma r\dot{\theta}\sin\theta + r\cos\theta(\gamma - g) = 0 \end{cases}$$